In the Name of God

DYNAMICS

[Course No. 8102128]

Dr. Mehdi Ghassemieh

m.ghassemieh@ut.ac.ir

Tel. 6111-2273

Fax. 6640-3808

دینامیک (نیمسال ۲-۹۷-۹۶)
شماره درس ۸۱۰۲۱۲۸

دکتر مهدی قاسمیه
دانشکده مهندسی عمران

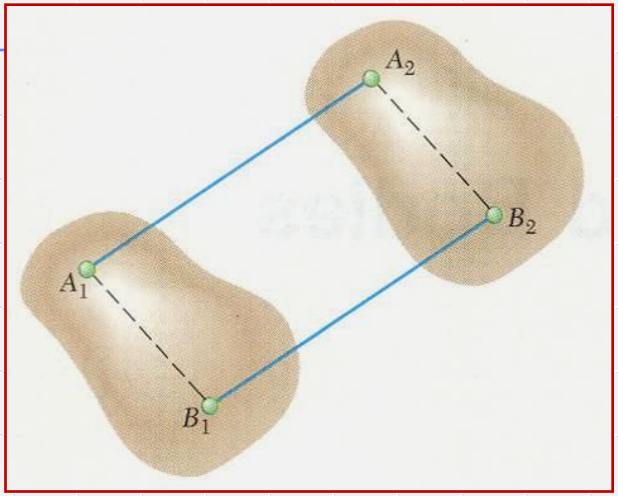
فصل پنجم :

KINEMATICS OF RIGID BODIES

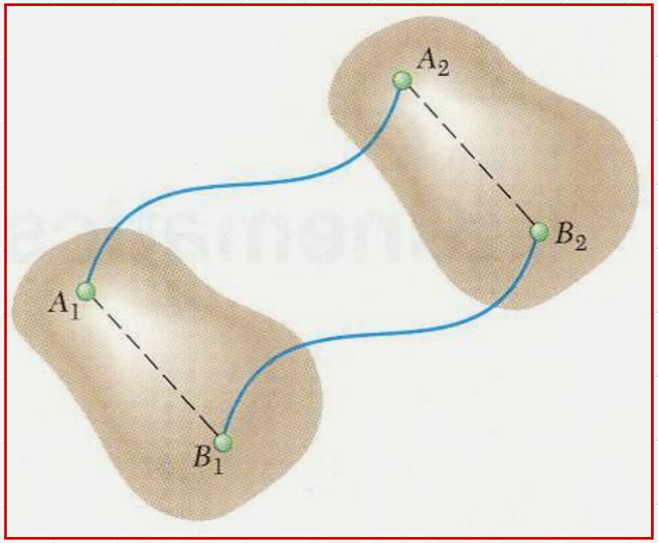
سینماتیک اجسام صلب

حرکت اجسام صلب

۱) حرکت انتقالی **Translation**



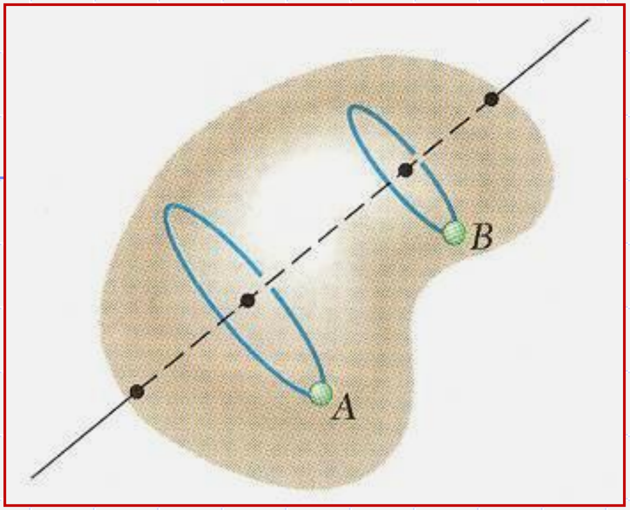
- Rectilinear Translation
  (انتقالی از نوع مستقیم الخط)



- Curvilinear Translation
  (انتقالی از نوع منحنی الخط)

۲) حرکت دورانی حول محور ثابت

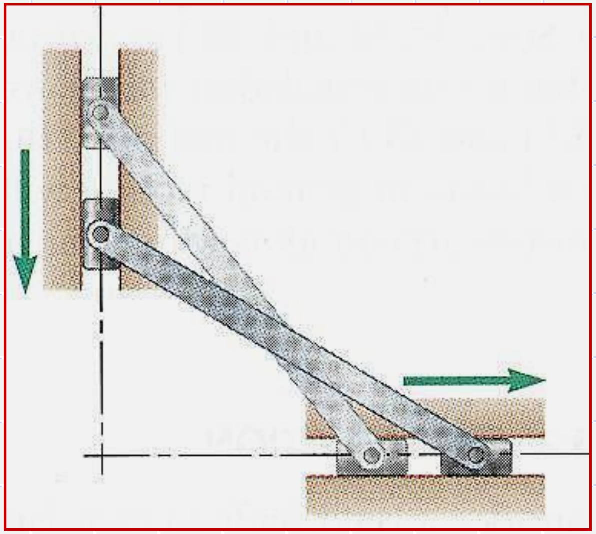
Rotation about a fixed axis

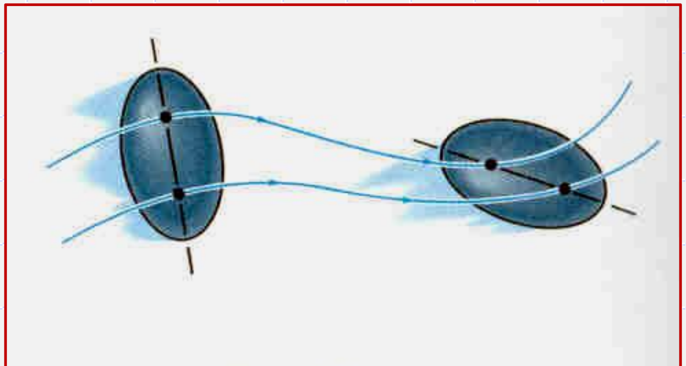


۳) حرکت عمومی در صفحه

General plane motion

(ترکیبی از حرکت انتقالی و دورانی در صفحه)

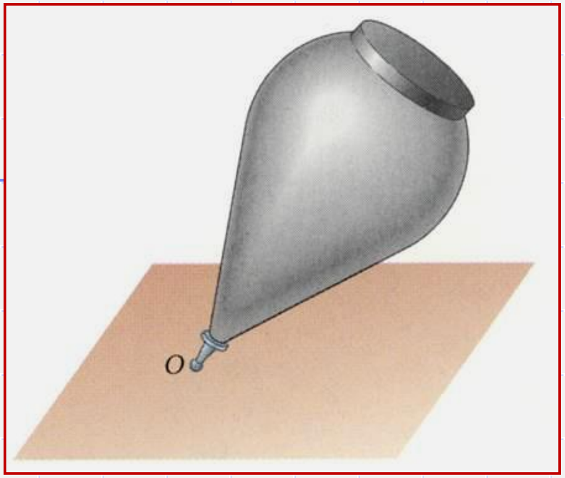




General plane motion

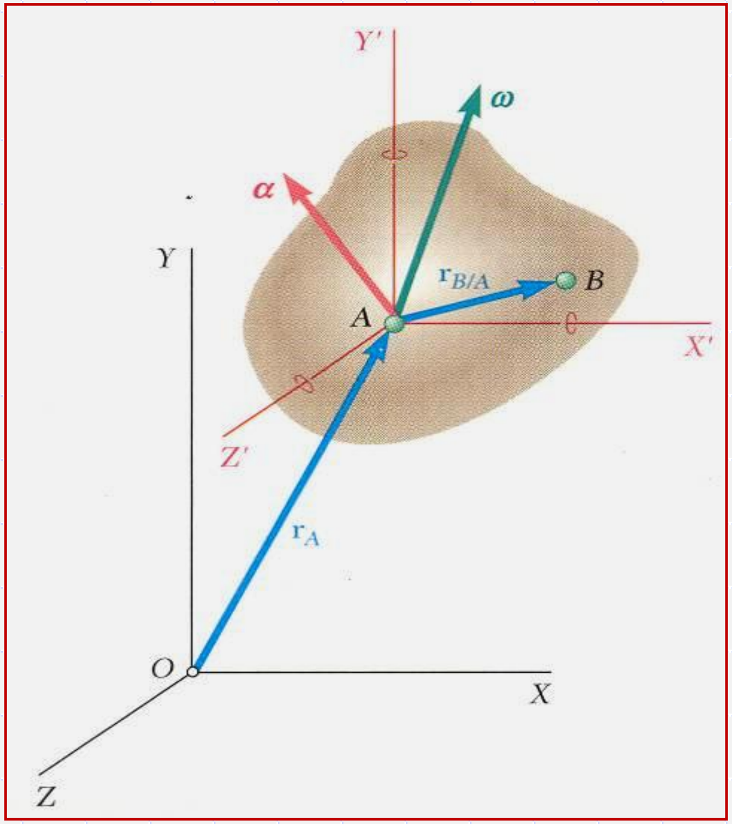
۴) حرکت دورانی حول نقطه ثابت

Motion about a fixed point

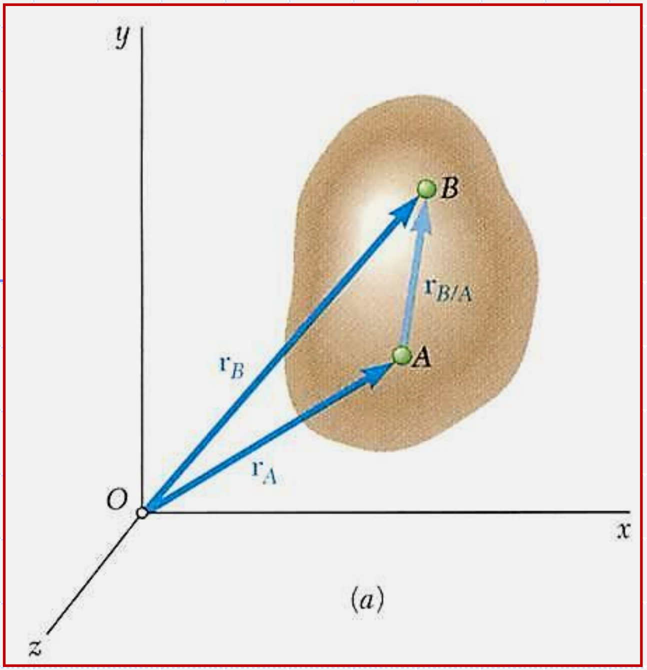


۵) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

General motion



حرکت انتقالی



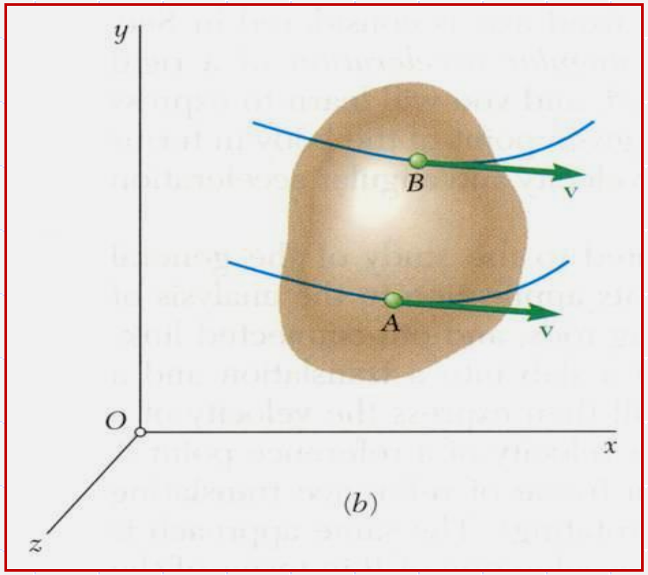
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

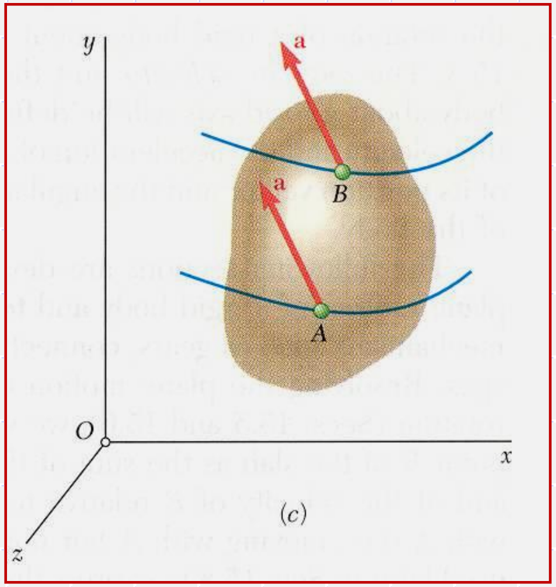
$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_{B/A} = \ddot{\vec{r}}_A$$

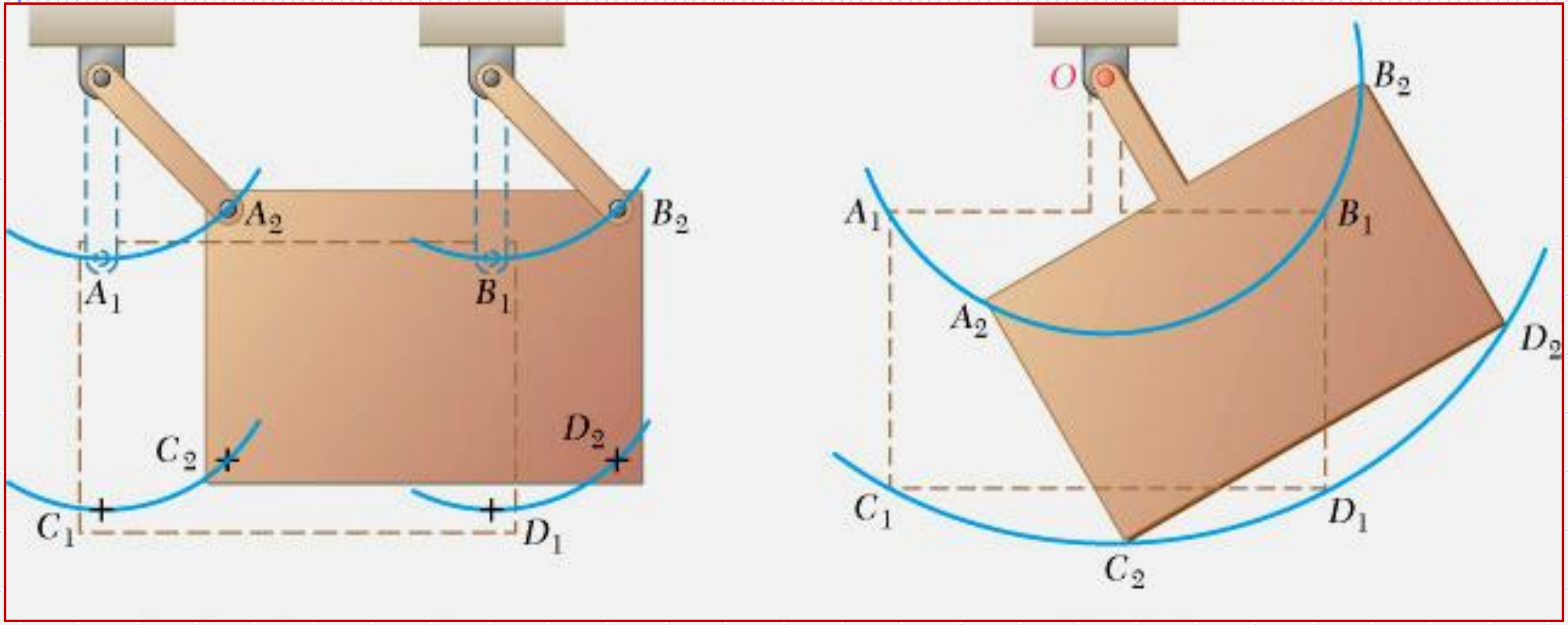
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$





بنابراین حرکت انتقالی اجسام صلب همانند یک نقطه مادی فرض می شود ، یعنی سرعت و شتاب همه نقاط یکسان است.

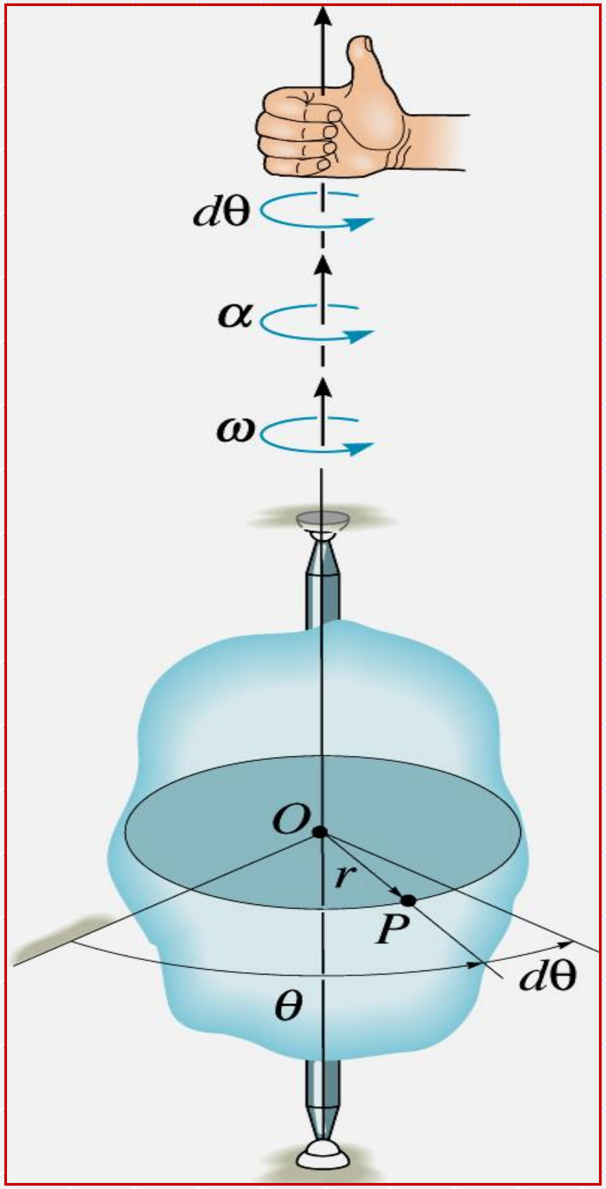
مثال :



Curvilinear translation

Rotation

حرکت دورانی حول محور ثابت



وقتی یک جسم صلب حول محور ثابتی دوران میکند، هر نقطه از آن روی یک مسیر دایره ای حرکت میکند.

مختصات زاویه ای آن نقطه توسط زاویه θ معین میشود.

تغییر در مختصات زاویه ای، dθ ، تغییر مکان زاویه ای نامیده میشود و بر حسب رادیان یا دوران مشخص میگردد.

یک دوران = 1 revolution = 2π radians

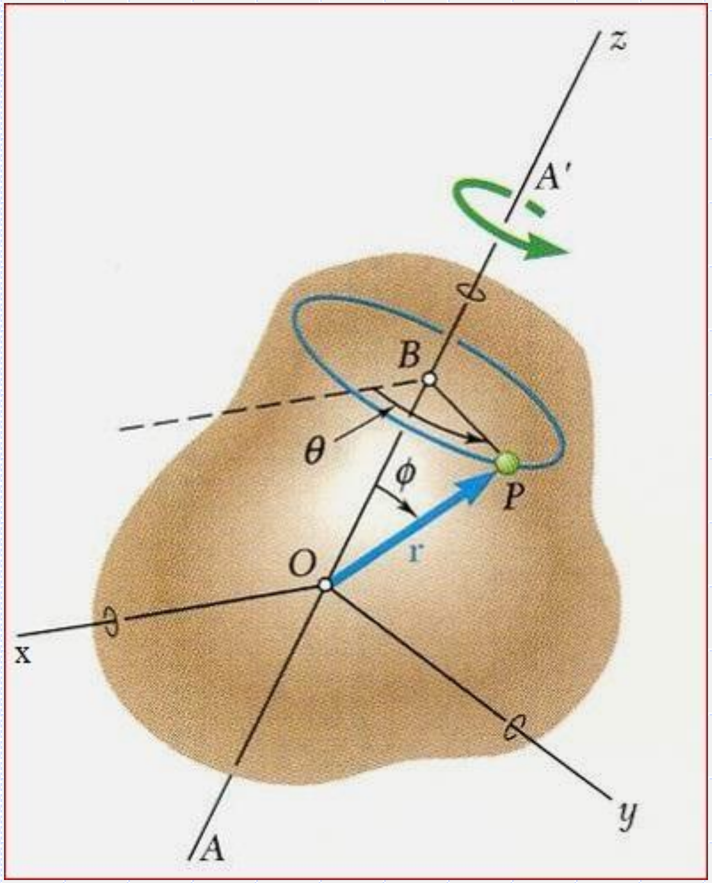
Angular velocity = ω = سرعت زاویه ای

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}(rad/s)$$

Angular acceleration = α = شتاب زاویه ای

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{or} \quad \alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}(rad/s^2)$$

حرکت دورانی حول محور ثابت

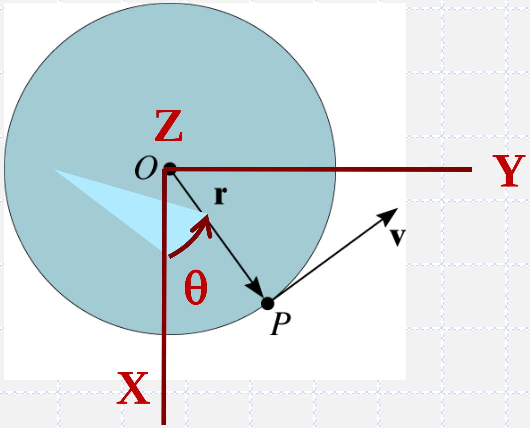


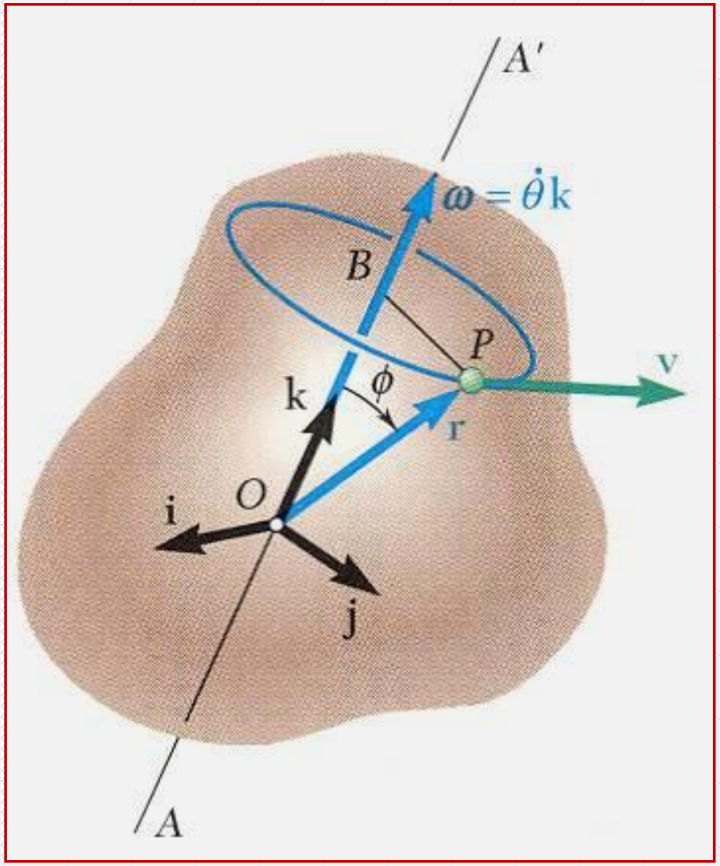
مختصات زاویه ای نسبت به صفحه xz $\theta:$

زاویه بین بردار موقعیت و محور z $\phi:$

بردار موقعیت نقطه **P**: $\vec{r}$

فرض کنیم که دوران حول محور در حال انجام است :

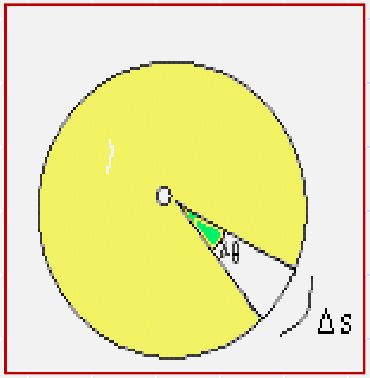




$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

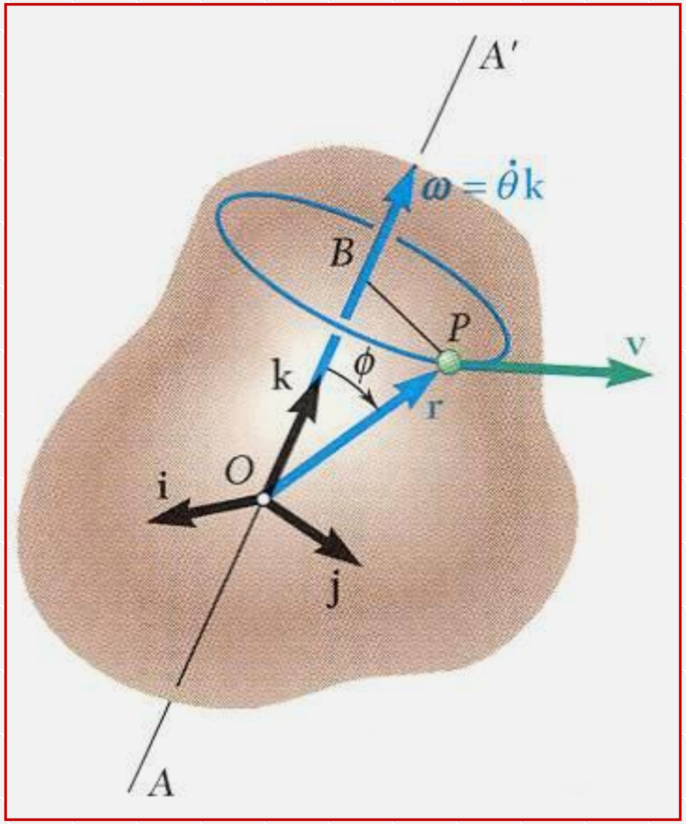
$$\Delta s = (BP)\Delta\theta = (r\sin\phi)\Delta\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}(r\sin\phi)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\dot{\theta}\sin\phi$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k} = angular\ velocity$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

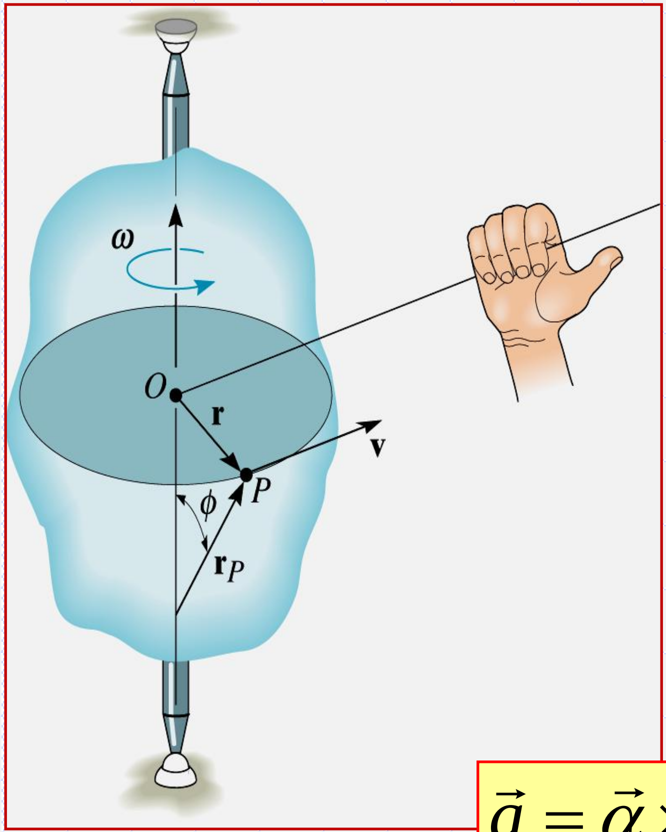
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = angular\ acceleration$$

$$= \alpha\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \text{ tangential acceleration}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \text{ normal acceleration}$$

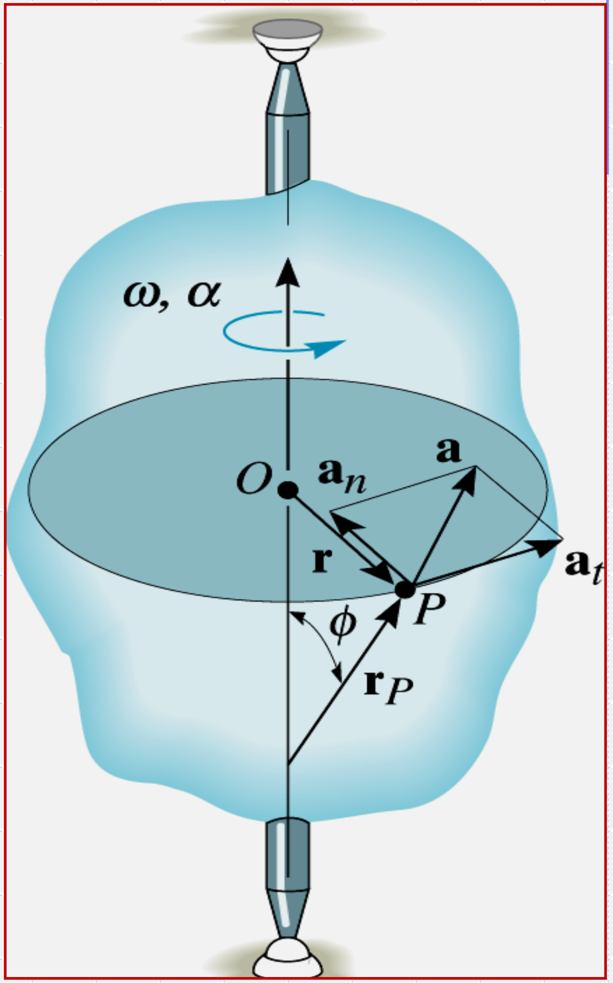


$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

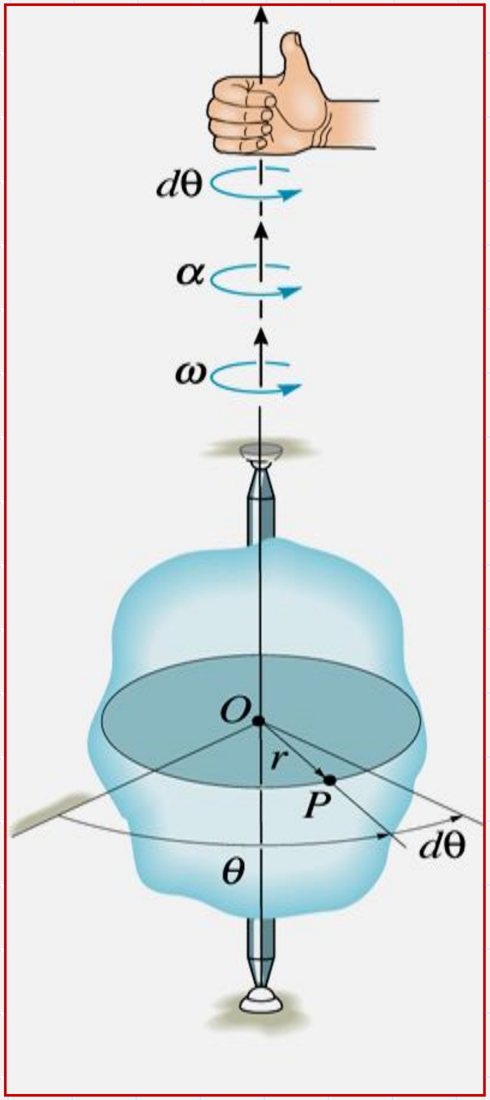
$$= \alpha \vec{k} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$



$$\vec{a}_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r} \qquad a_t = r\alpha$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \qquad a_n = r\omega^2$$

حرکت یک نقطه در دستگاه مختصات قطبی



$$\vec{v}_P = \cancel{\dot{r}}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

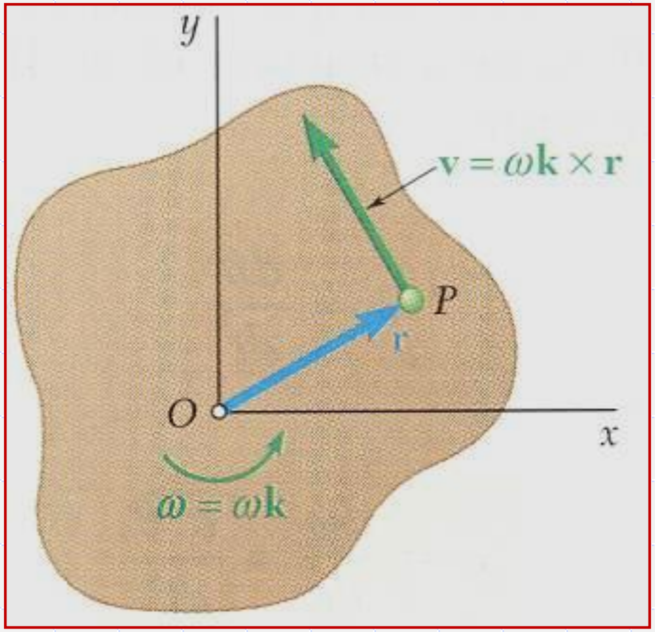
r = constant

$$\vec{v}_P = r\,\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta = r\,\omega\,\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}_P = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta})\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}_P = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta$$
$$= -r\omega^2\hat{u}_r + r\alpha\hat{u}_\theta$$

حالت خاص (حرکت دورانی یک صفحه نازک حول محور عمود بر صفحه)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times \vec{r}$$

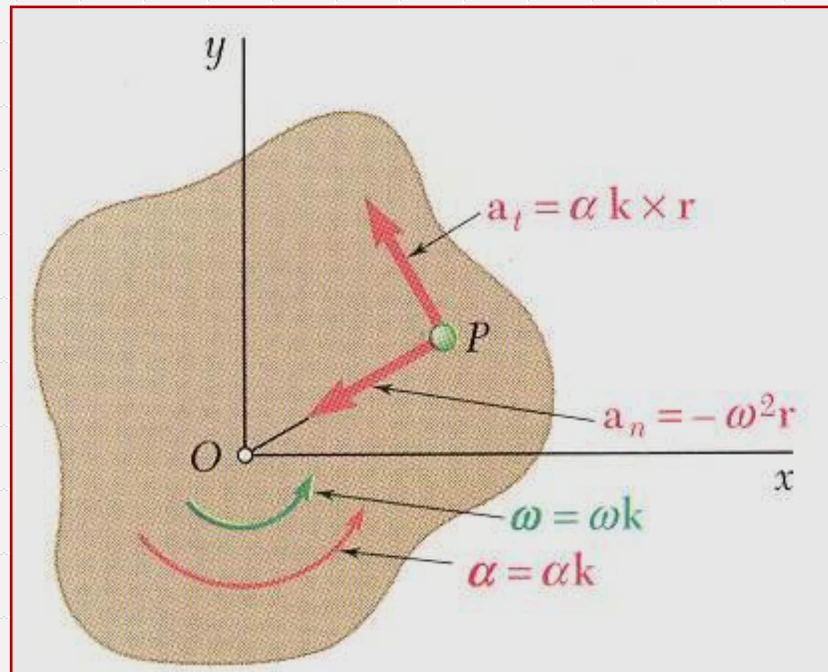
$$v = r\omega$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

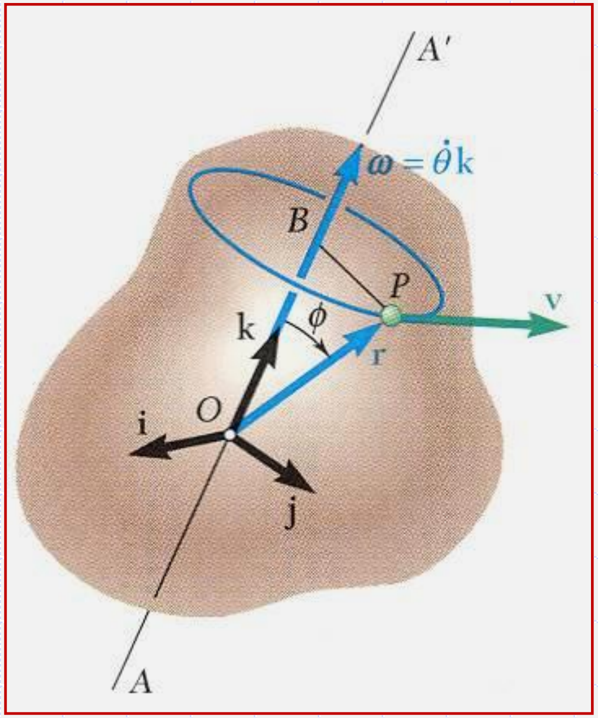
$$= \alpha \vec{k} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a}_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r} \qquad a_t = r\alpha$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \qquad a_n = r\omega^2$$



معادلات دوران جسم صلب حول محور ثابت

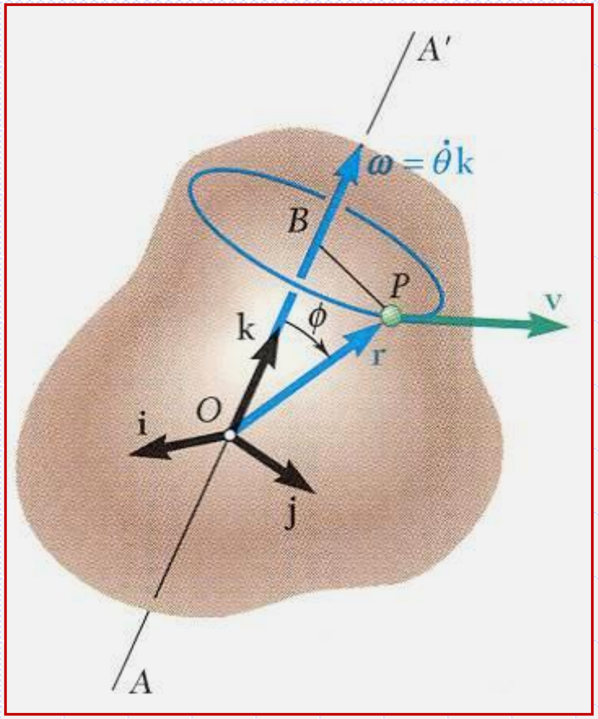


$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{or} \qquad dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

حرکت نقطه مادی	حرکت دورانی جسم صلب
x	θ
$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
$a = v\left(\frac{dv}{dx}\right)$	$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$

حالت های خاص حرکت دورانی جسم صلب حول محور ثابت :



حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت :

- **Uniform Rotation ,** $\alpha = 0$ **:**

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت :

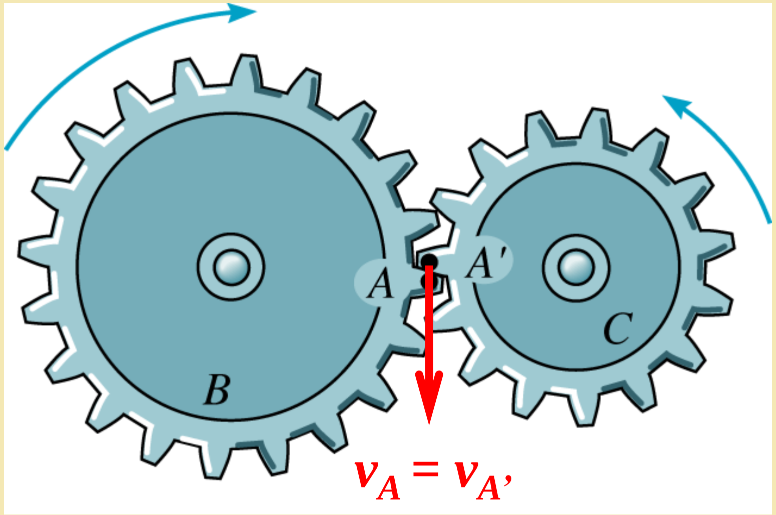
- **Uniformly Accelerated Rotation ,** $\alpha =$ **constant:**

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Kinematic Compatibility   سازگاری :



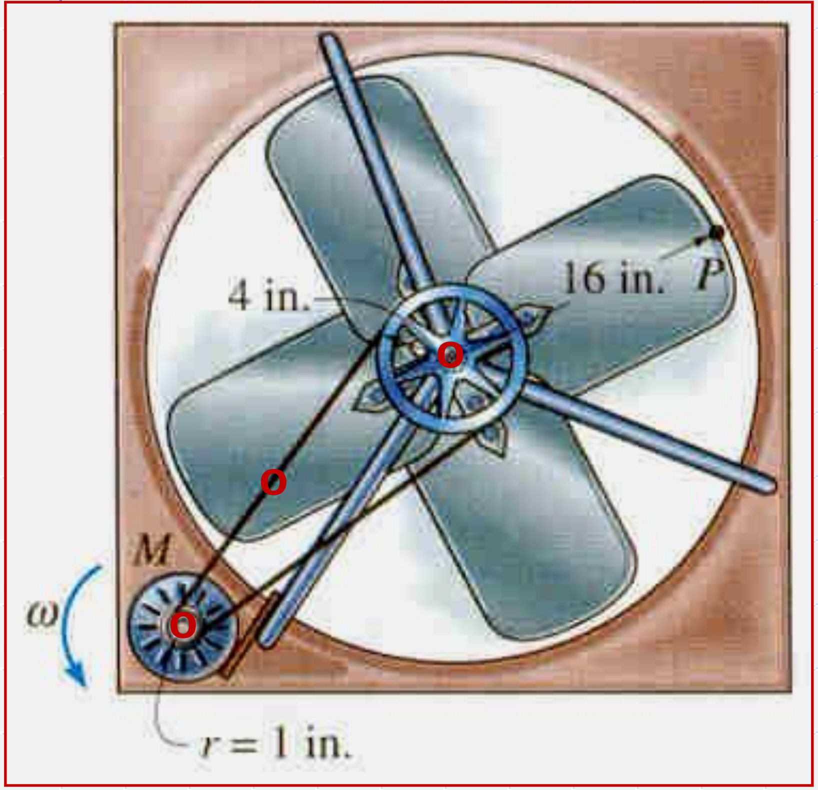
$$v_P = r\dot{\theta} = r\omega$$

در مثال مقابل چنانچه هیچگونه
لغزشی در بین دنده ها نباشد،
سازگاری بشرح ذیل خواهیم داشت:

$$v_A = v_{A'}$$

$$\omega_B R_B = \omega_C R_C$$

مثال : موتور M شروع به دوران با سرعت زاویه ای بشرح ذیل میکند. شعاع موتور، قرقره فن و لبه های فن بترتیب 1، 4 و 16 اینچ است. مطلوبست سرعت و شتاب نقطه P در زمان t = 0.5 (s) .



$$\omega_m = 4(1 - e^{-t}) \quad \text{rad/s}$$

t = زمان

حل :

$$\alpha_m = \frac{d\,\omega_m}{dt} = 4e^{-t} \ rad/s$$

$$@t = 0.5s$$

$$\omega_m = 4(1 - e^{-0.5}) = 1.5$$

$$\alpha_m = 4e^{-0.5} = 2.42$$

سرعت زاویه ای فن :

$$v = \omega_m r_m = \omega_f r_f$$
$$1.57(1) = \omega_f (4) \Rightarrow \omega_f = 0.39 rad / s$$

شتاب زاویه ای فن :

$$a_t = \alpha_m r_m = \alpha_f r_f$$
$$2.42(1) = \alpha_f (4) \Rightarrow \alpha_f = 0.60 rad / s^2$$

سرعت نقطه P :

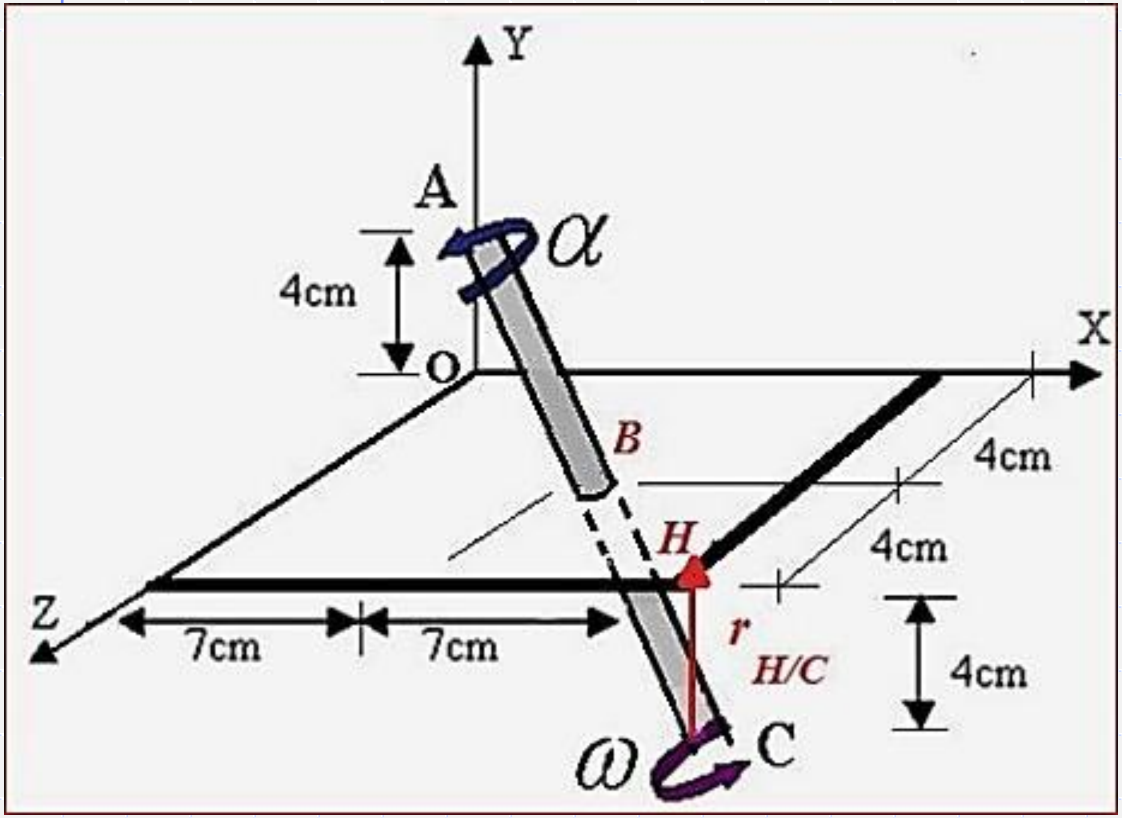
$$v_p = \omega_f r_p = (0.39)(16) = 6.30 in / s$$

شتاب نقطه P :

$$a_n = (\omega_f)^2 r_p = (0.39)^2 (16) = 2.47 in / s^2$$
$$a_t = \alpha_f r_p = (0.60)(16) = 9.70 in / s^2$$

$$a_p = \sqrt{(a_n)^2 + (a_t)^2} = \sqrt{(2.47)^2 + (9.70)^2} = 10.0 in / s^2$$

مثال : صفحه جوش داده شده به میله AC حول محور میله با سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای در حال دوران است. مطلوبست: سرعت و شتاب نقطه H.
نقطه A روی محور Y است و نقطه C زیر نقطه H قرار گرفته است.



$$\omega=\omega_{AC}=18\ \frac{rad}{s}$$

$$\alpha=\alpha_{CA}=45\ \frac{rad}{s^2}$$

حل :

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{r}_{H/C}=4\vec{j}$$

$$r_{H/B}=7\vec{i}+4\vec{k}$$

$$\omega = 18 \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\lambda}_{AC}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{14^2 + 8^2 + 8^2}} = \frac{1}{18}(14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\vec{\omega} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$\vec{v}_H = \vec{\omega} \times \vec{r}_{H/B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 56\vec{k} \quad \left(\frac{cm}{s}\right)$$

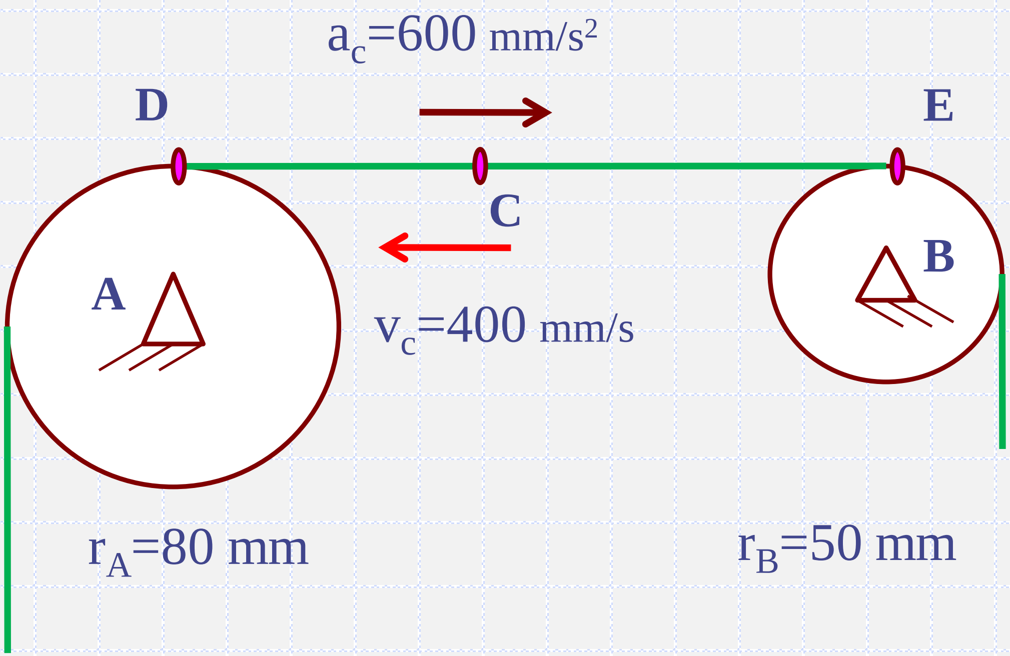
$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{\lambda}_{CA} = -\alpha \vec{\lambda}_{AC} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{-45}{18}(14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\vec{a}_H = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{H/B} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{H/B}\right)$$

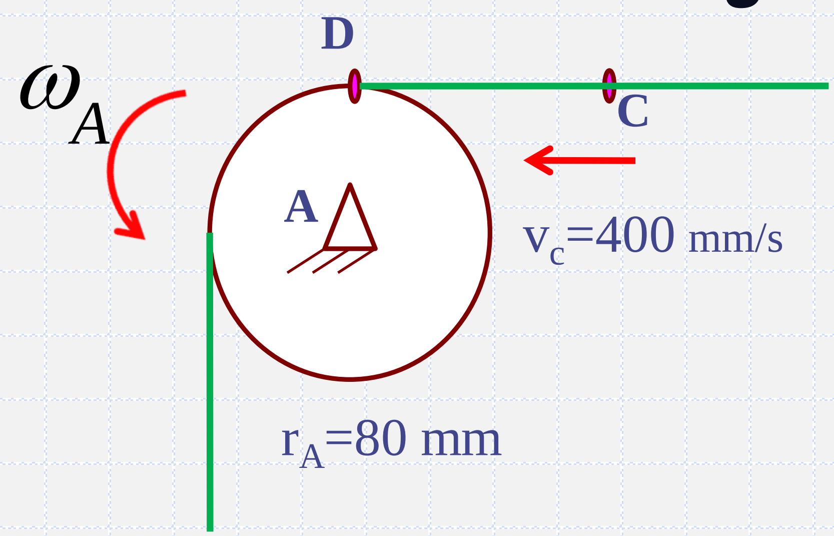
$$= \frac{-45}{18} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ -32 & 0 & 56 \end{vmatrix} = -386\vec{i} - 1040\vec{j} - 396\vec{k} \quad \left(\frac{cm}{s^2}\right)$$

مثال : باتوجه به حرکت کابل از قرقره B به سمت قرقره A مطلوب است :

$\omega_A = ?$	$\omega_B = ?$
$\alpha_A = ?$	$\alpha_B = ?$
$a_D = ?$	$a_E = ?$

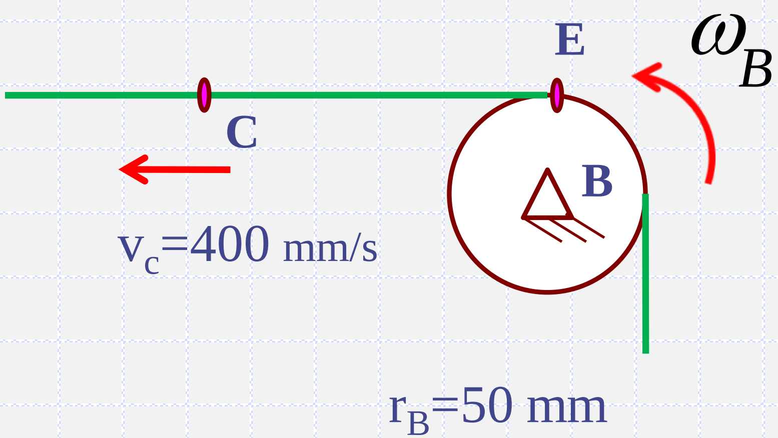


حل :



$$v_D = r_A\,\omega_A$$

$$400 = 80\,\omega_A \quad \Rightarrow \quad \omega_A = 5\ \frac{rad}{s}$$



$$v_E = r_B\,\omega_B$$

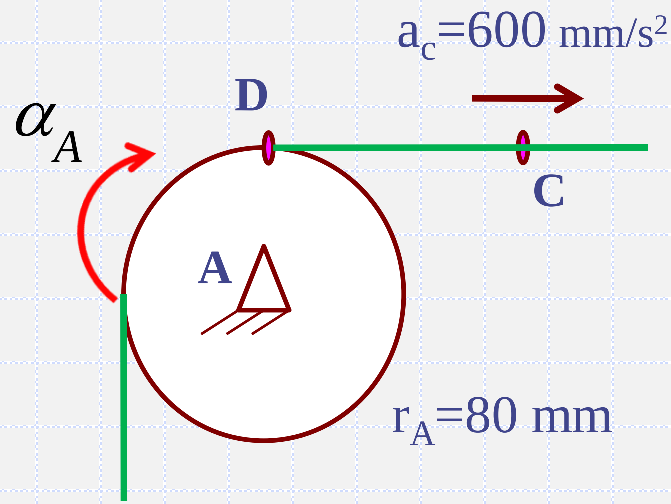
$$400 = 50\,\omega_B \quad \Rightarrow \quad \omega_B = 8\ \frac{rad}{s}$$

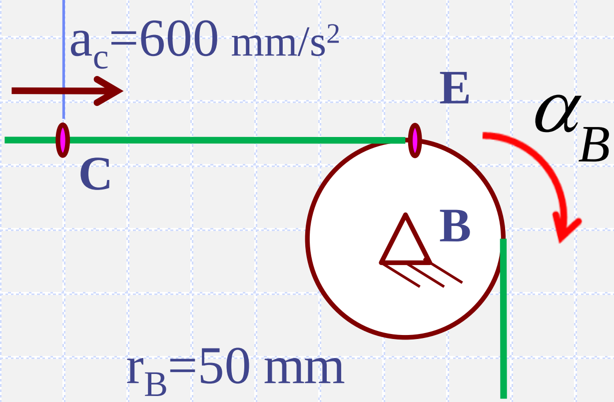
$$(a_D)_t = r_A\,\alpha_A$$

$$600 = 80\,\alpha_A \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = 7.5 \ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_E)_t = r_B\,\alpha_B$$

$$600 = 50\,\alpha_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = 12 \ \frac{rad}{s^2}$$



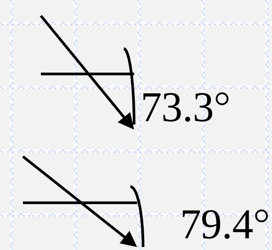


$$(a_D)_n = r_A\,\omega_A^{\,2} = 80\,(5)^2 = 2000 \ \ {}^{mm}/_{s^2}$$

$$(a_E)_n = r_B\,\omega_B^{\,2} = 50(8)^2 = 3200 \ \ {}^{mm}/_{s^2}$$

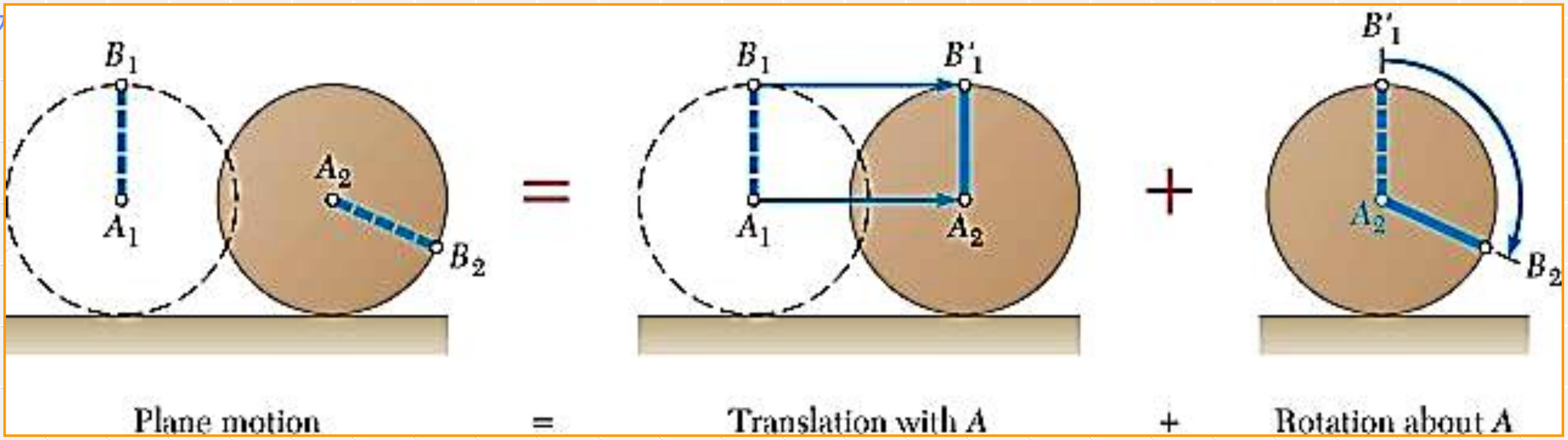
$$a_D = \sqrt{(600)^2 + (2000)^2} = 2088 \ \ {}^{mm}/_{s^2}$$

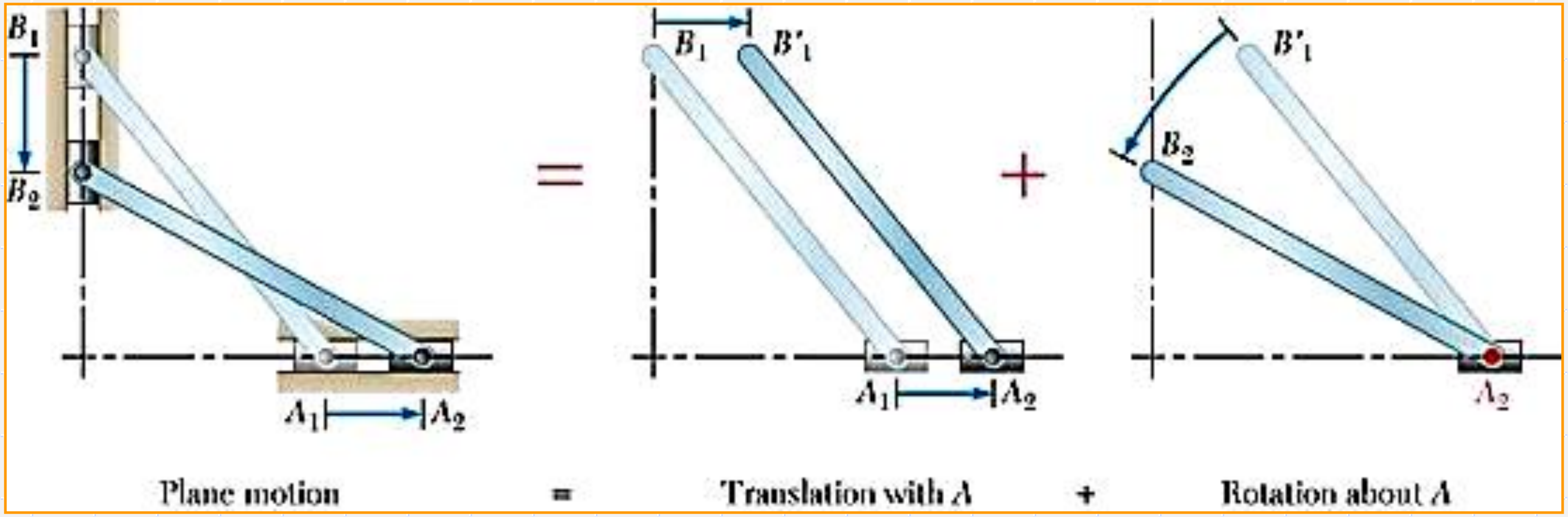
$$a_E = \sqrt{(600)^2 + (3200)^2} = 3256 \ \ {}^{mm}/_{s^2}$$



حرکت کلی در صفحه (حرکت عمومی در صفحه)

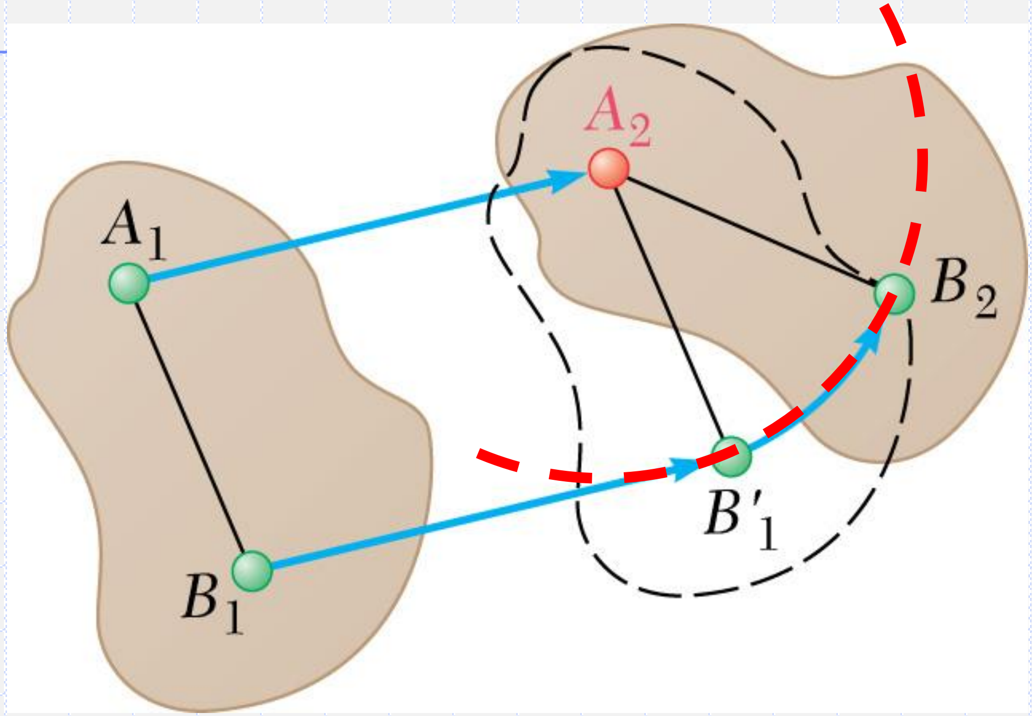
از ترکیب حرکت انتقالی و حرکت دورانی حول محور ثابت بدست می آید .





حرکت عمومی در صفحه = حرکت انتقالی + حرکت دورانی

حرکت عمومی در صفحه = حرکت دورانی + حرکت انتقالی

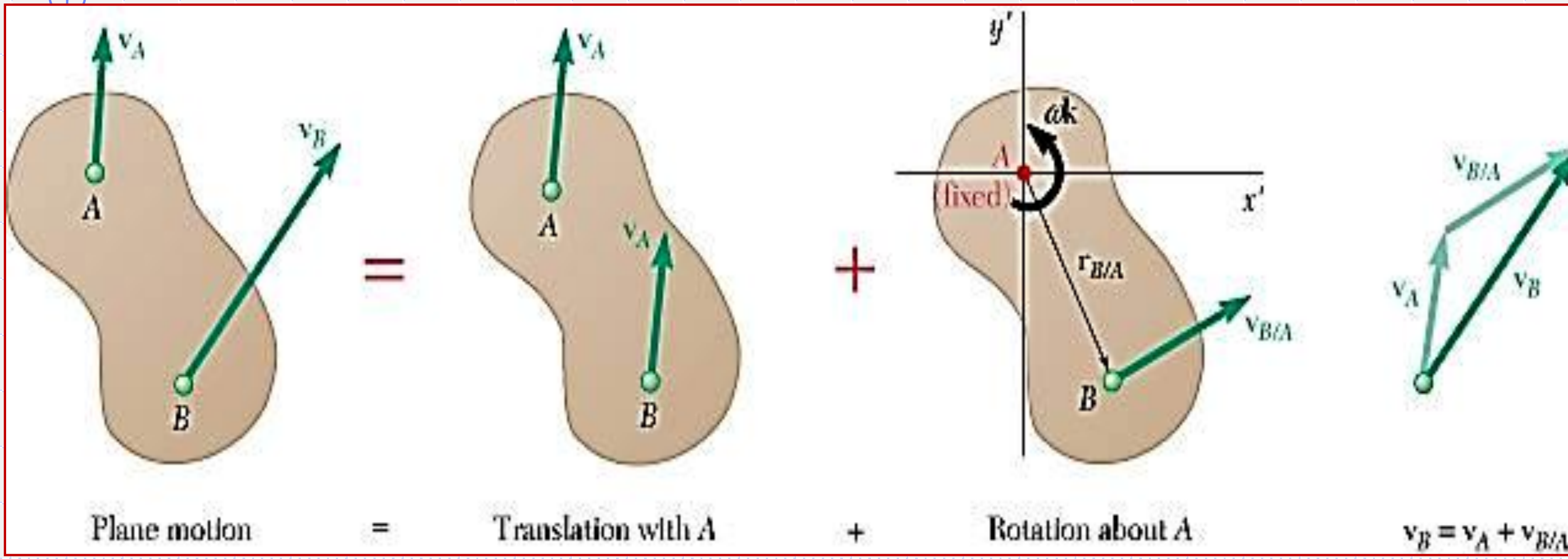


حرکت عمومی در صفحه = حرکت انتقالی (با A) + حرکت دورانی (حول A)

سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای

Relative and Absolute Velocity

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$



$$\left|\vec{v}_{B/A}\right| = \omega r$$

r = **distance from A to B**

Velocity Diagram

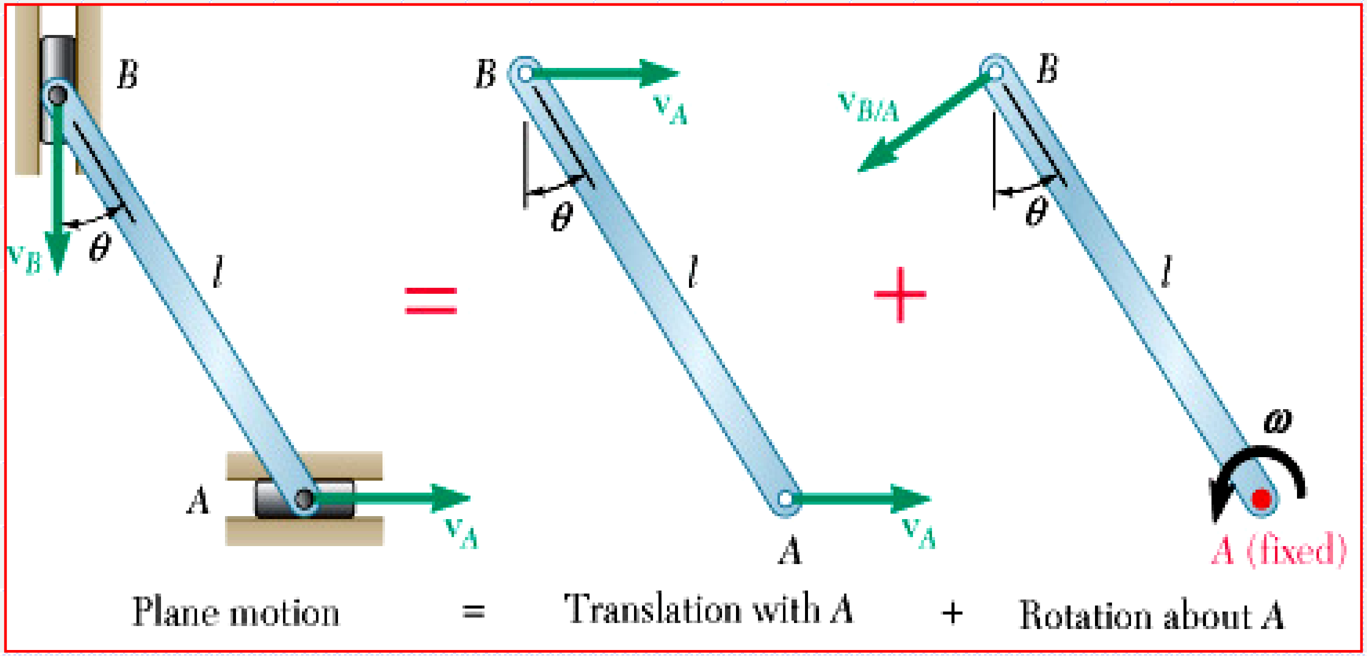
دیاگرام سرعت

$$\vec{v}_{B/A} = \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

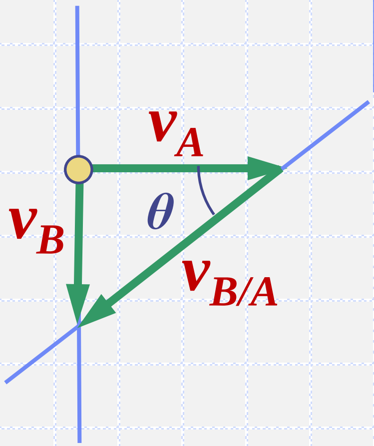
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

$\checkmark = v_A \qquad v_B = ? \qquad \omega = ?$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$



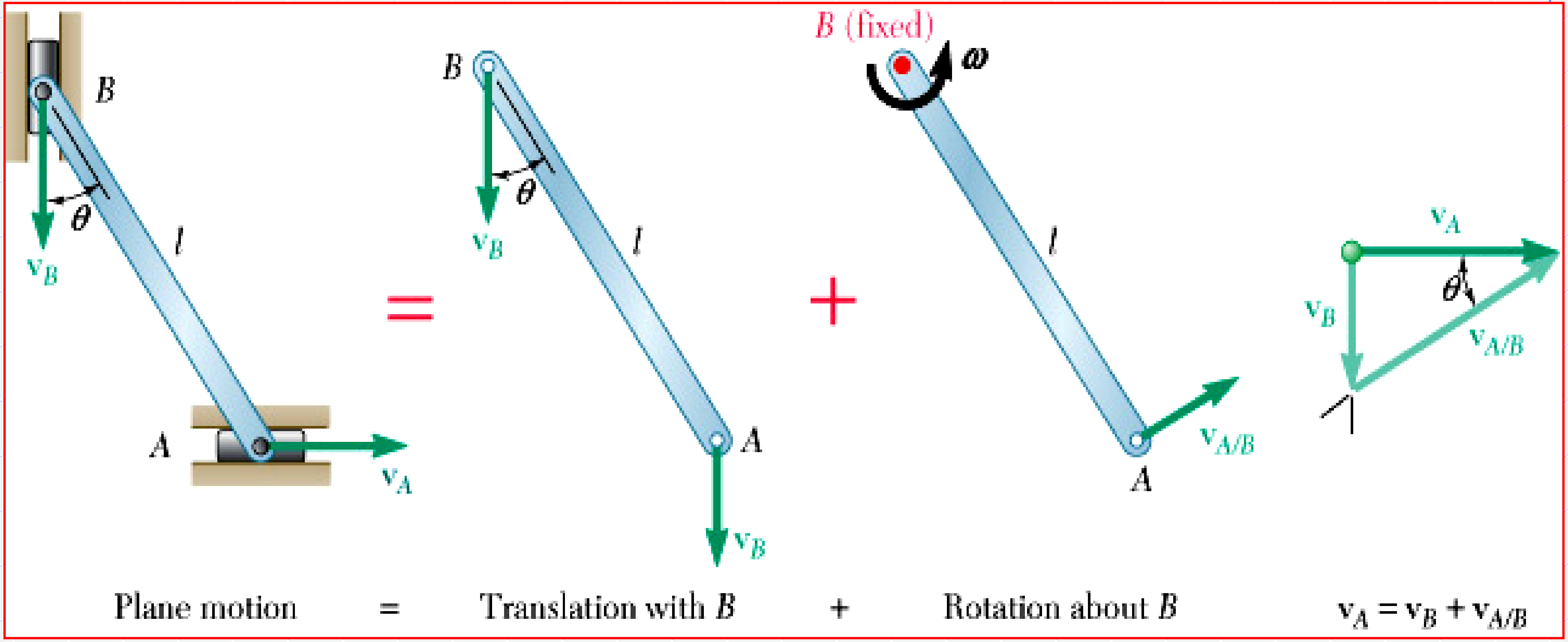
دو معادله و دو مجهول



دیاگرام سرعت

$$\tan\theta = \frac{v_B}{v_A} \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \tan\theta$$

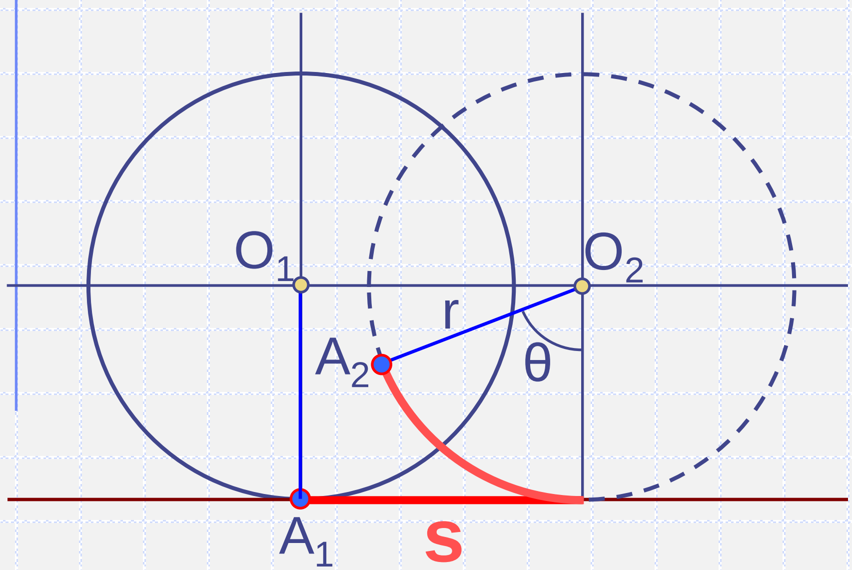
$$v_{B/A} = l\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l\cos\theta}$$



سرعت زاویه ای میله در دوران حول نقطه B همانند دوران حول نقطه A میباشد.
سرعت زاویه ای مستقل از نقطه مرجع یا نقطه مشخصی می باشد.

Rolling Motion حرکت غلتشی دیسک

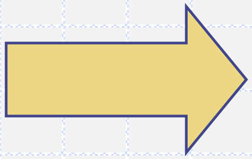
فرض می شود که دیسک در حال غلتش و بدون لغزش است



از هندسه :

$$\boxed{s = r\theta}$$

S = تغییر مکان مرز دیسک

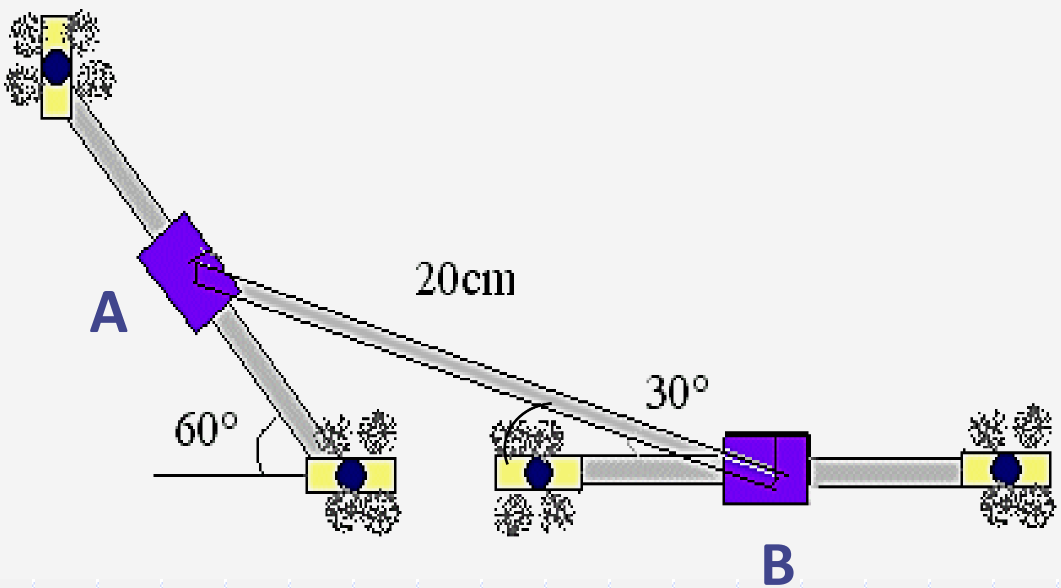


$$v = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$a = r\ddot{\theta} = r\alpha$$

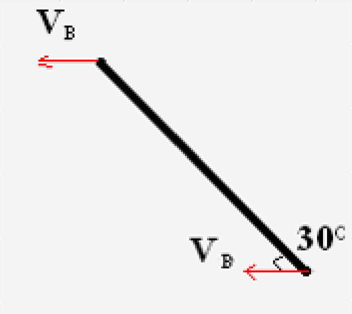
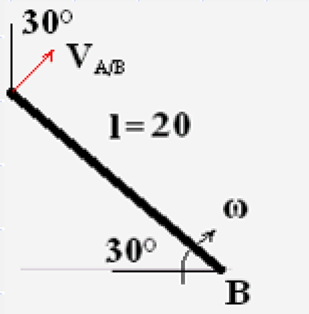
مثال : طوقه B با سرعت $25\,{}^{cm}\!/_{s}$ به سمت چپ در حال حرکت است .

مطلوبست سرعت طوقه A ؟



حل :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

$\vec{V}_A =$  + 

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

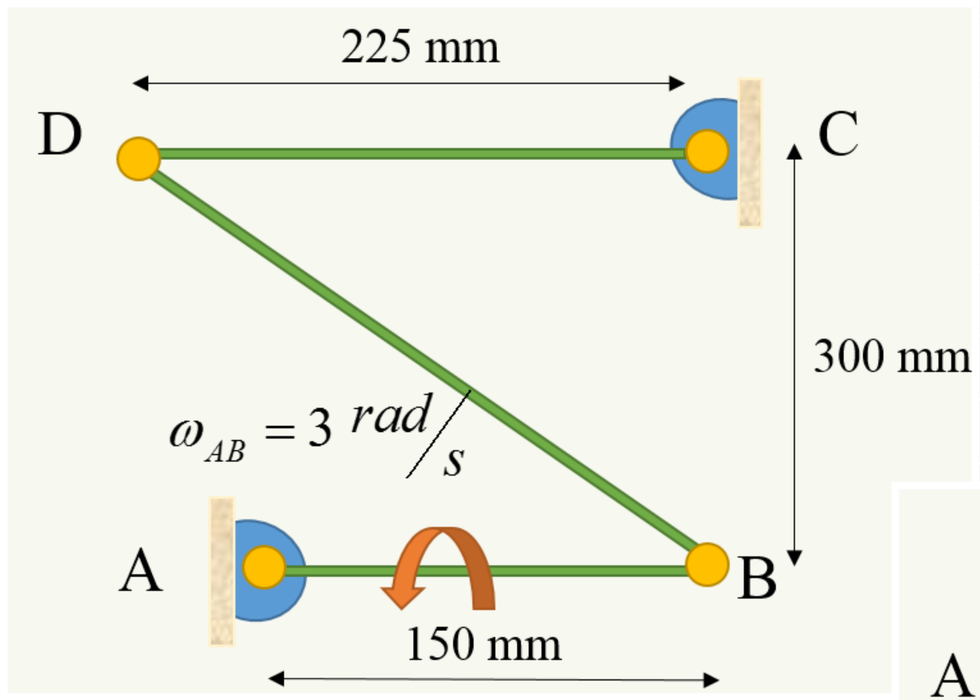
$$[V_A \nwarrow] = [V_B \leftarrow] + [20\omega \nearrow]$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = 25 \text{ (cm/s)}$$

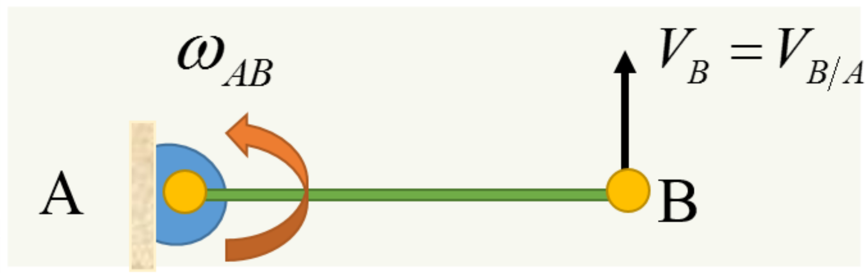
مثال : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر $3\ rad/s$ باشد ،

مطلوب است :

$$\omega_{BD} = ? \quad , \quad \omega_{DC} = ?$$

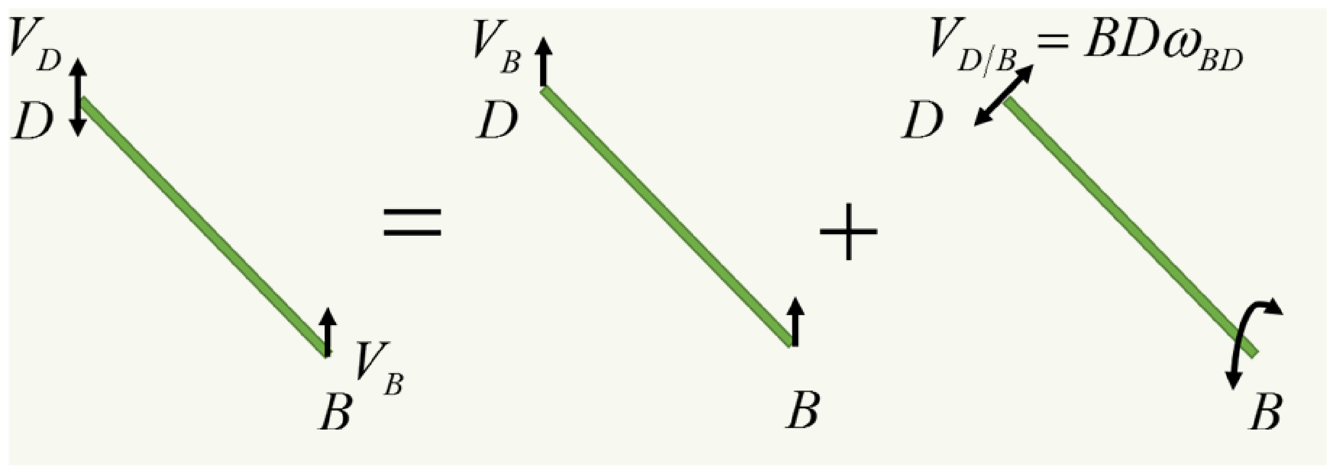


حل :

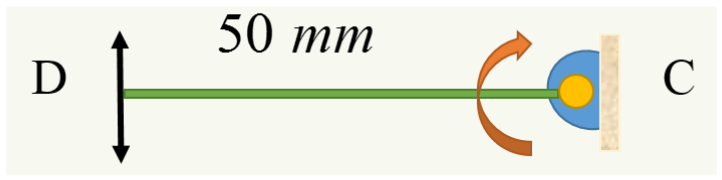


$$V_B = V_{B/A} = 0.45\ m/s$$

$$\omega_{AB} = 3\ rad/s$$

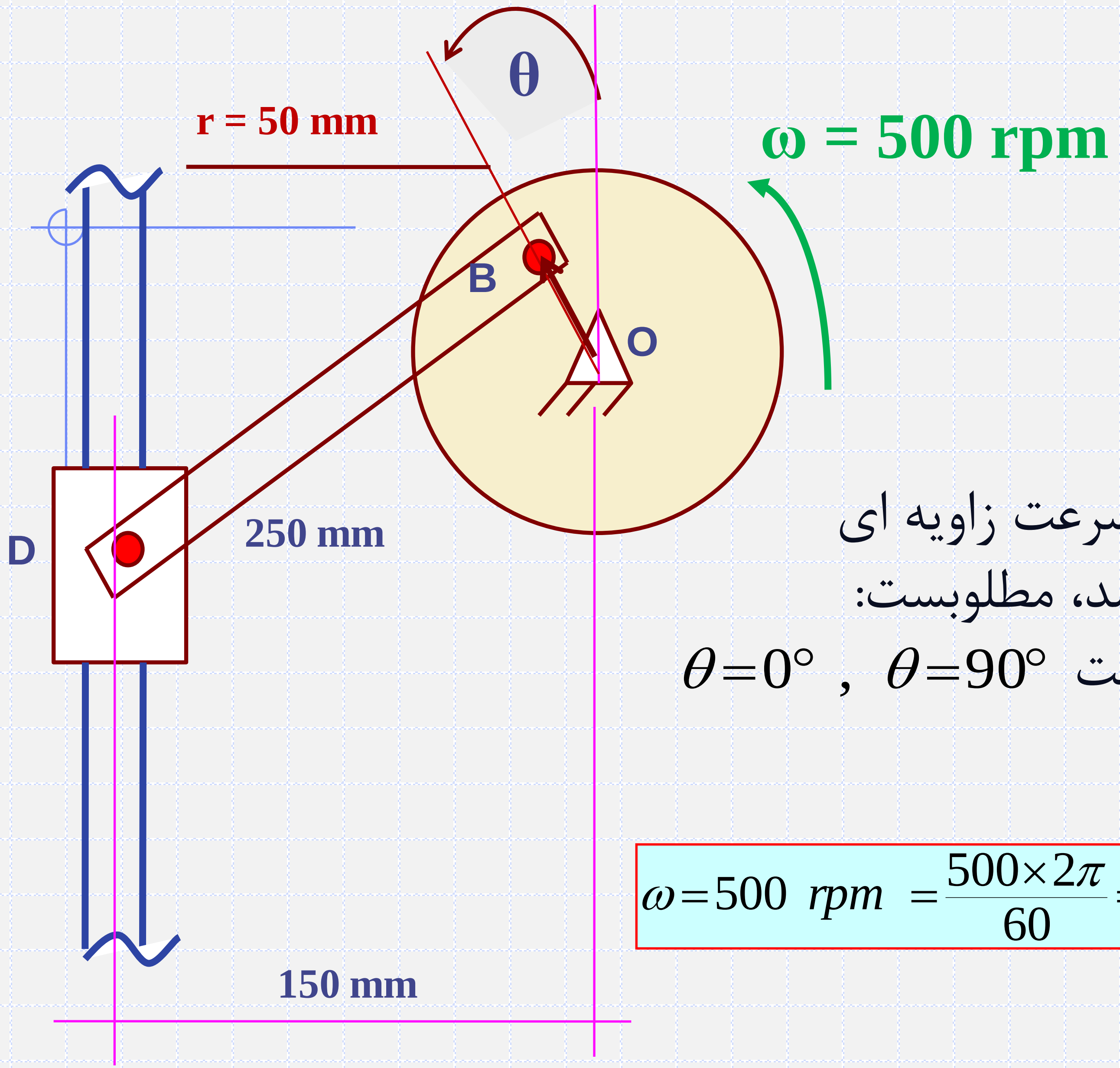


$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} \\ [V_D \updownarrow] = [0.45 \uparrow] + [BD(\omega_{BD}) \swarrow\!\!\nearrow] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{BD} = 0 \\ \vec{V}_D = \vec{V}_B = [0.45 \ \text{m/s} \uparrow] \end{cases}$$



$$V_D = 0.225\,\omega_{DC} = 0.45 \ \text{m/s}$$

$$\omega_{DC} = 2 \ \text{rad/s}$$

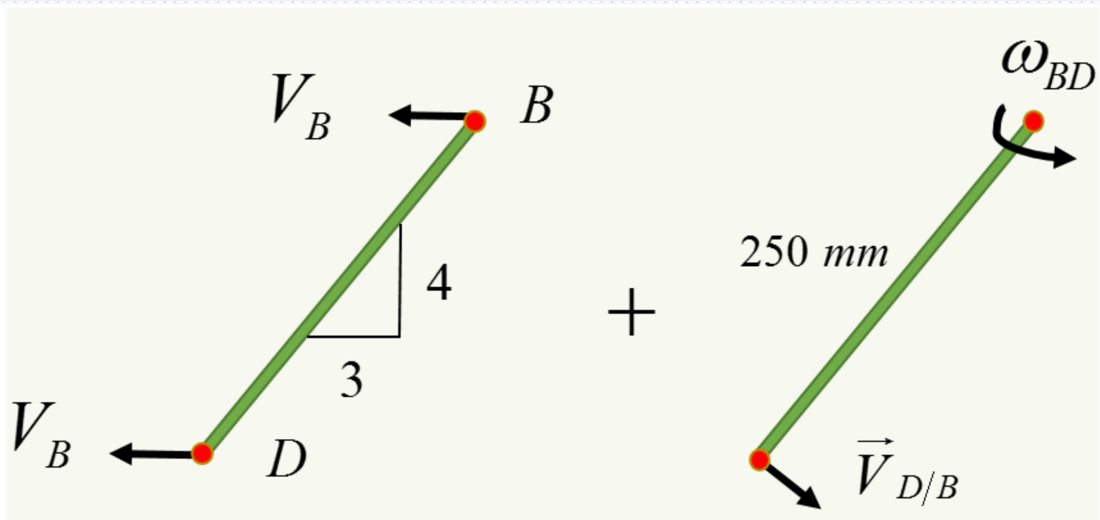


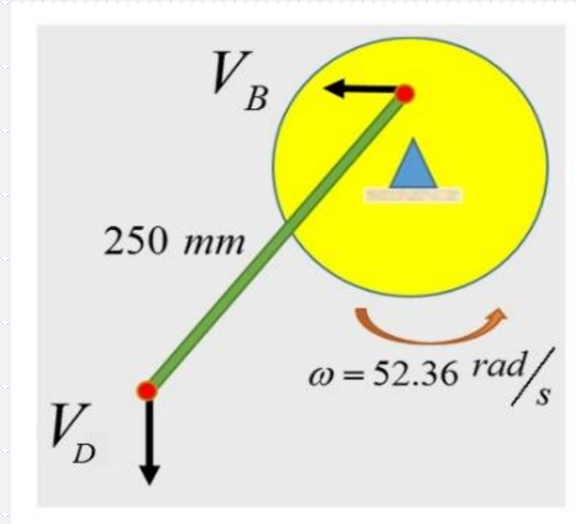
مثال : اگر دیسک با سرعت زاویه ای ثابت درحال دوران باشد، مطلوبست:
سرعت طوقه D در حالت $\theta = 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$

$$\omega = 500 \ rpm \ = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36 \ rad/s$$

حل : در حالت $\theta=0°$

$$V_B = r\,\omega = 0.05\times 52.36 = 2.62 \;\; {}^{m}\!/_{s} \leftarrow$$



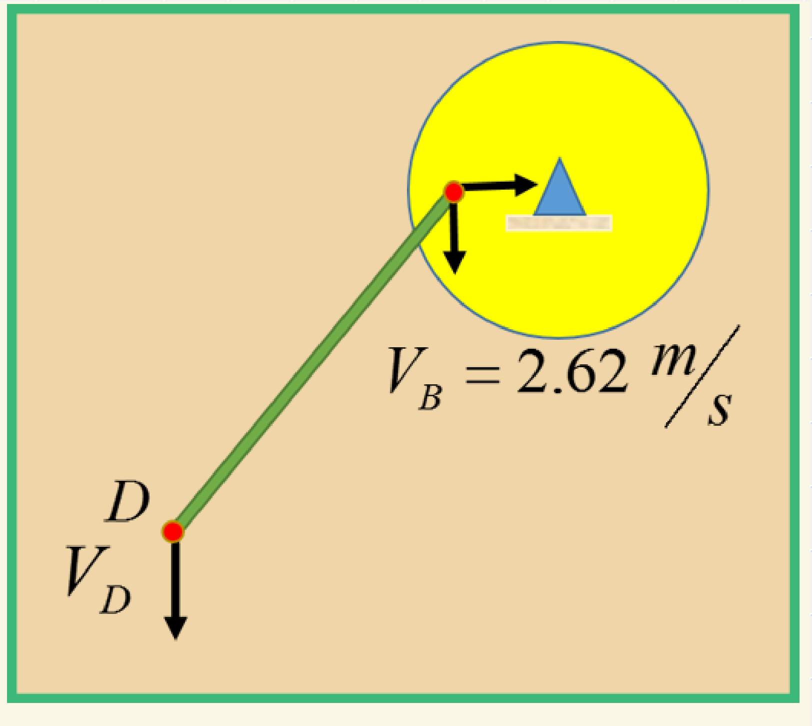


$$\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B}$$

$$\left[V_D \downarrow\right] = [2.62 \leftarrow] + [0.25\,\omega_{BD}]$$

$$\Rightarrow \quad V_D = 1.96 \;\; {}^{m}\!/_{s} \downarrow \quad , \quad \omega_{BD} = 13.1 \;\; {}^{rad}\!/_{s}$$

در حالت : $\theta = 90$

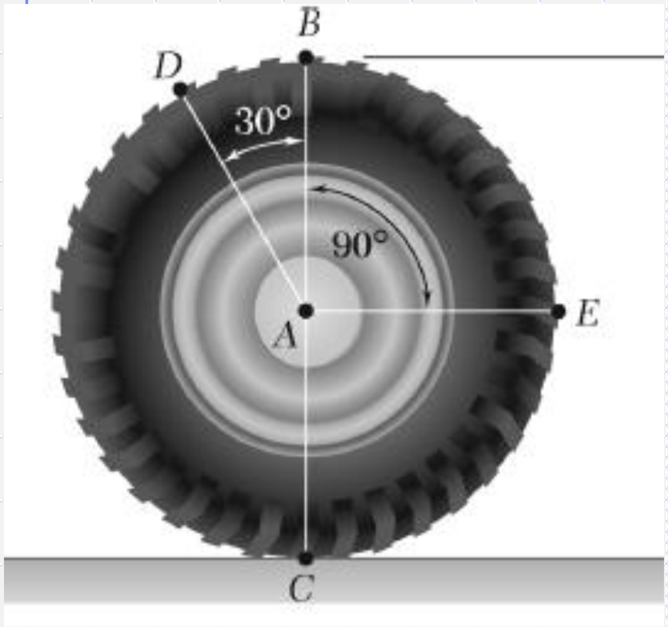


$$\boxed{V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62\ (m/s)\downarrow}$$

$$\boxed{\omega_{BD} = 0}$$

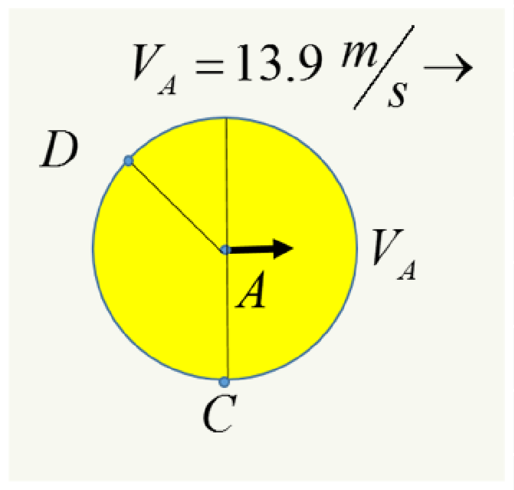
مثال : اتومبیلی با سرعت ثابت $50\,{}^{km}\!/\!{}_{s}$ در حال حرکت به سمت راست می باشد .

اگر قطر چرخ های اتومبیل $610mm$ باشد ، مطلوبست : سرعت نقاط B ، C , D .



حل :

$$V_A = 50\,{}^{km}\!/\!{}_{hr} = 13.9\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

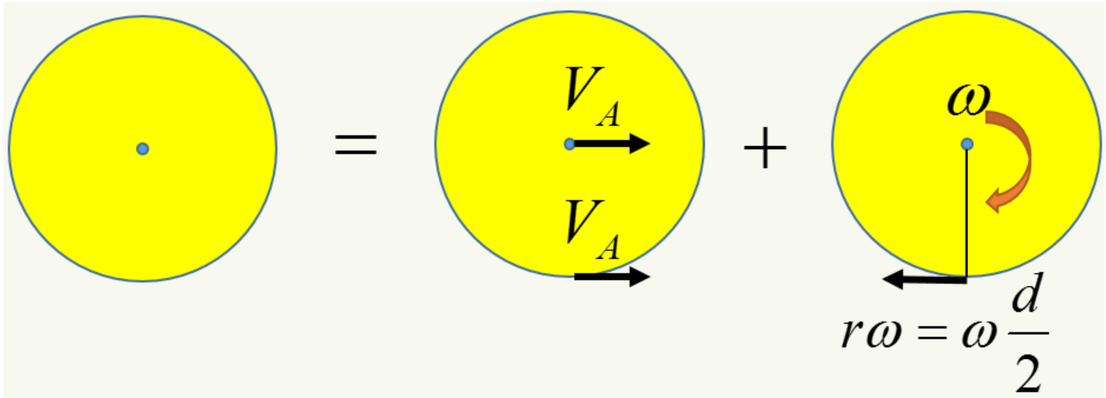


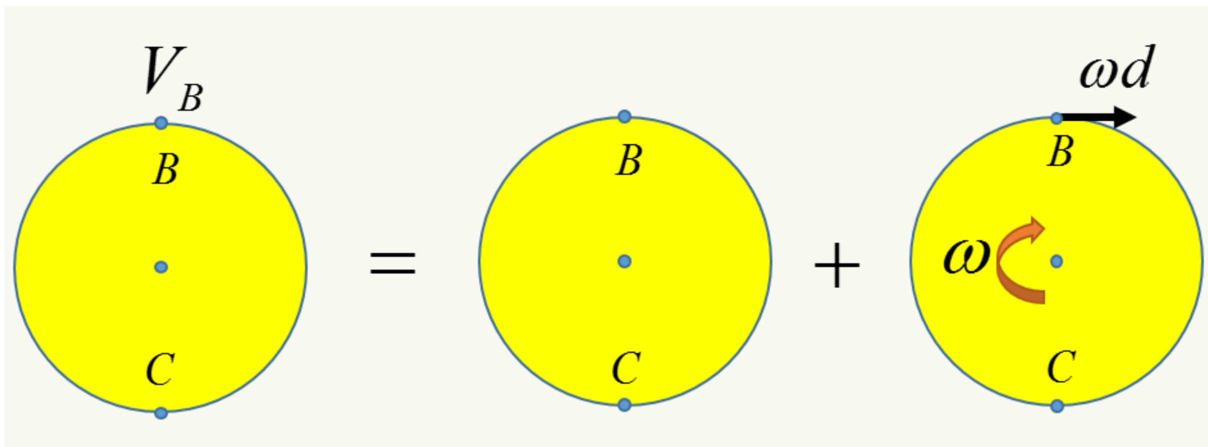
$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

$$V_{C/A} = V_A = r\omega$$

$$13.9 = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{13.9}{0.61/2}$$

$$V_C = 0$$

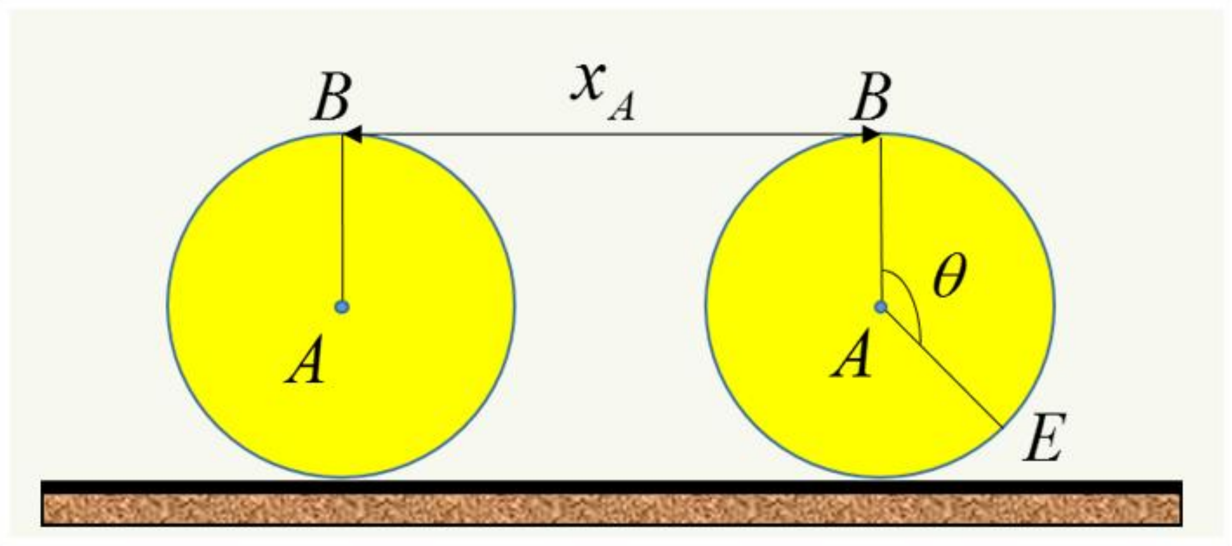




$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} = 0 + [2r\omega \rightarrow] = [2\times 13.9 \rightarrow] = [27.8\ \mathrm{m/s} \rightarrow]$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{D/A} = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \nearrow 30^\circ] = 2\times 13.9 \cos 15^\circ = [26.8\ \mathrm{m/s} \nearrow 15^\circ]$$

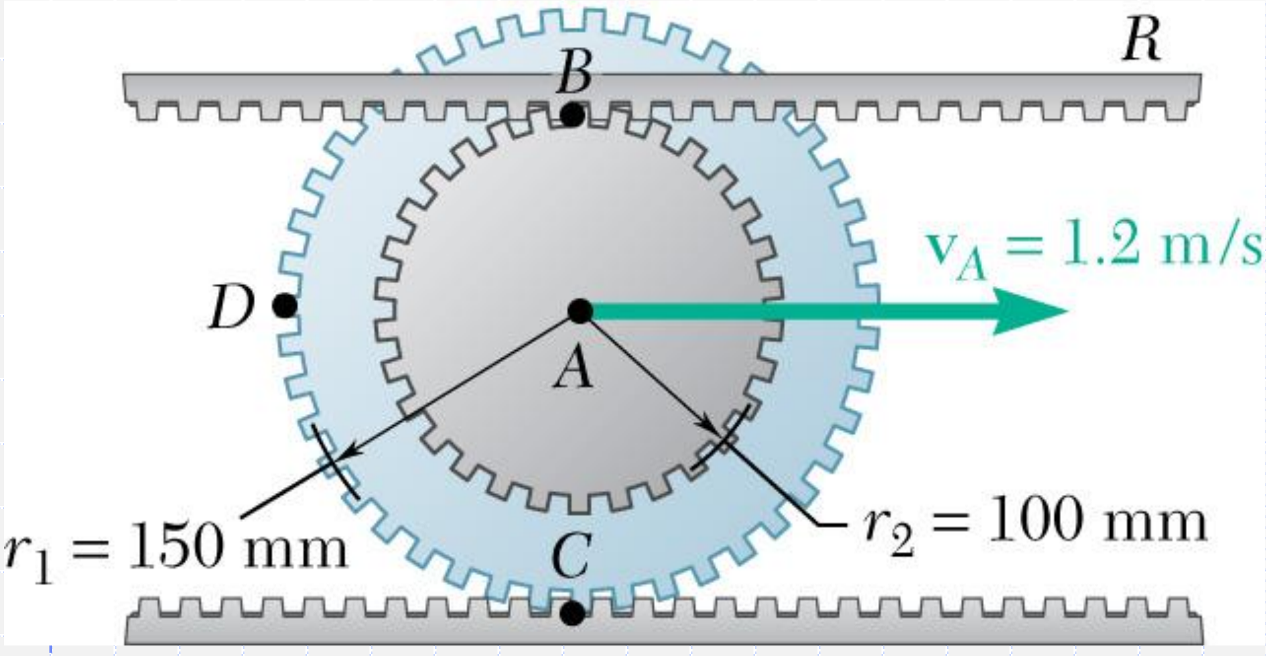
روش دوم : به شرطی که لغزشی نباشد .



$$x_A = r\theta$$
$$v_A = r\dot{\theta} = r\omega$$
$$a_A = r\alpha$$

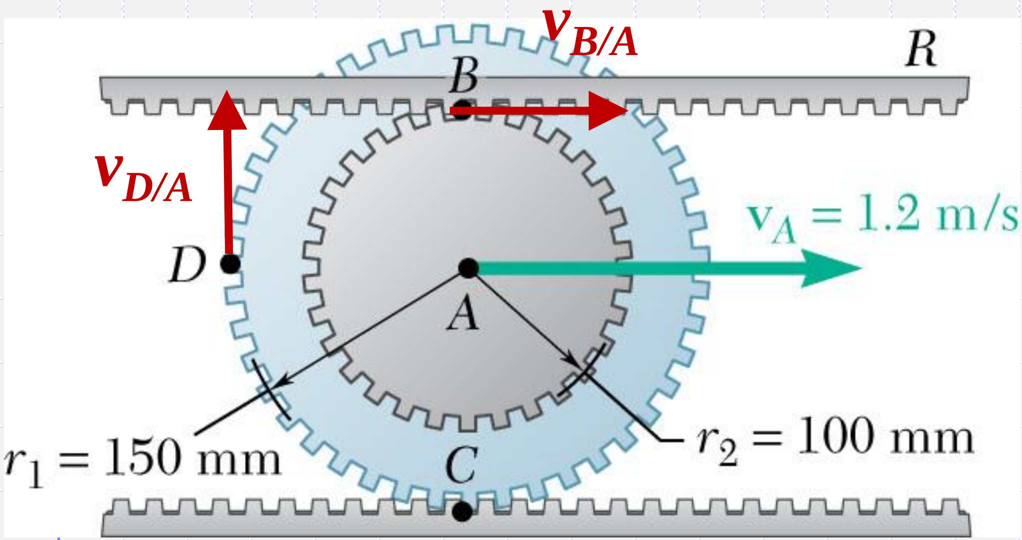
$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 44.84 \quad \text{rad}$$
$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \ \ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$
$$V_D = (DC)\omega = (\vec{CA} + \vec{AD}) \times \omega = .59 \times 44.84 = 26.5 \ \ {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

مثال :



مرکز چرخ دنده مزدوج روی ریل دندانه دار ثابت پائینی با سرعت 1.2 m/s در حال حرکت میباشد . مطلوبست: سرعت زاویه ای چرخ دنده و سرعت نقاط B و D از چرخ دنده و سرعت ریل دندانه دار متحرک بالائی.

حل :



$$v_A = \omega_A r_A$$

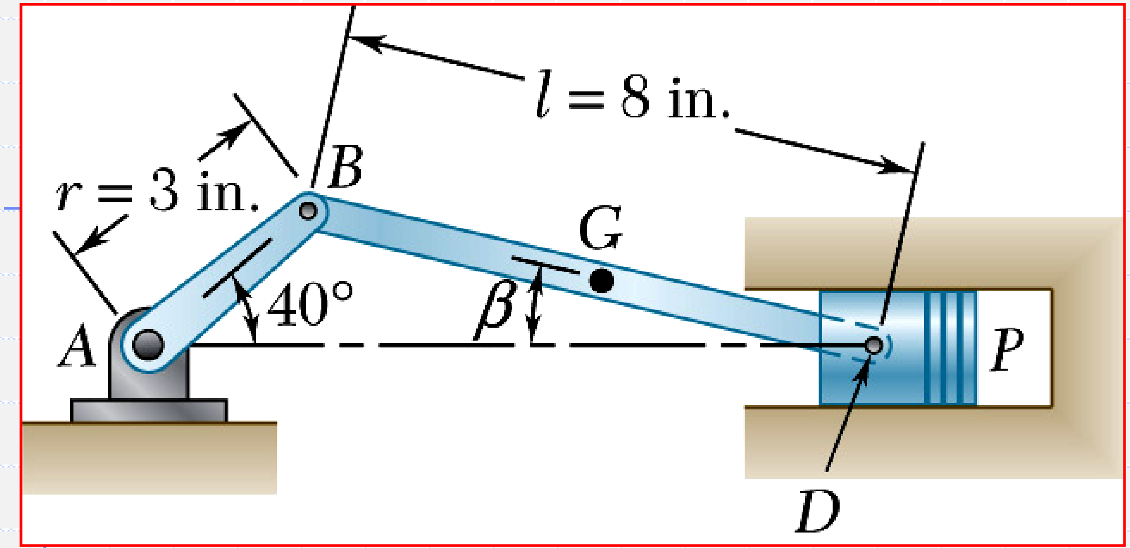
$$\omega_A = \frac{v_A}{r_A} = \frac{1.2}{0.15} = 8 \ rad/s$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = 1.2 + (8 \times 0.1) = [2\, m/s \rightarrow]$$

$$\vec{v}_R = \vec{v}_B = [2\, m/s \rightarrow]$$

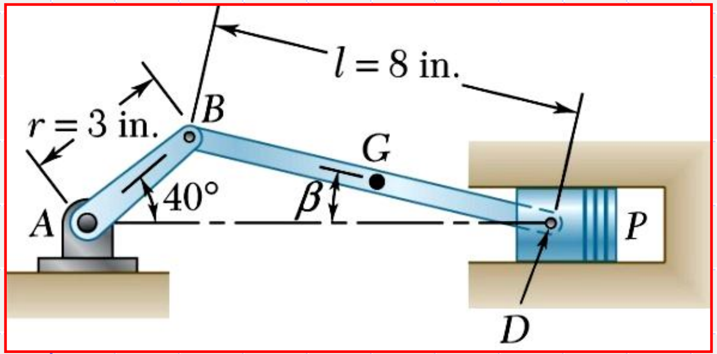
$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A} = 1.2\vec{i} + (8 \times 0.15)\vec{j} = 1.2\vec{i} + 1.2\vec{j}$$

مثال :

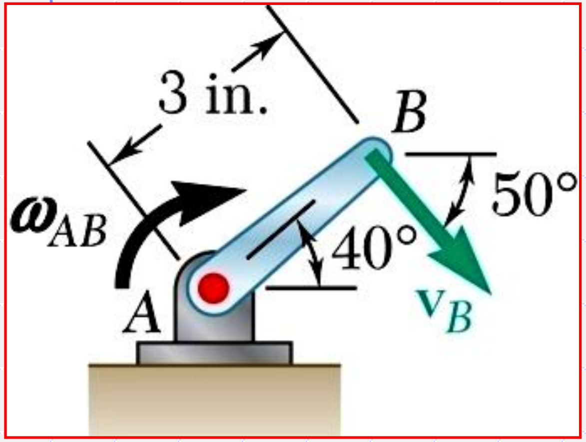


میل لنگ AB دارای سرعت زاویه ای ثابت ساعتگرد 2000 دور در دقیقه است.
مطلوبست: سرعت زاویه ای میله BD و سرعت پیستون P .

حل :

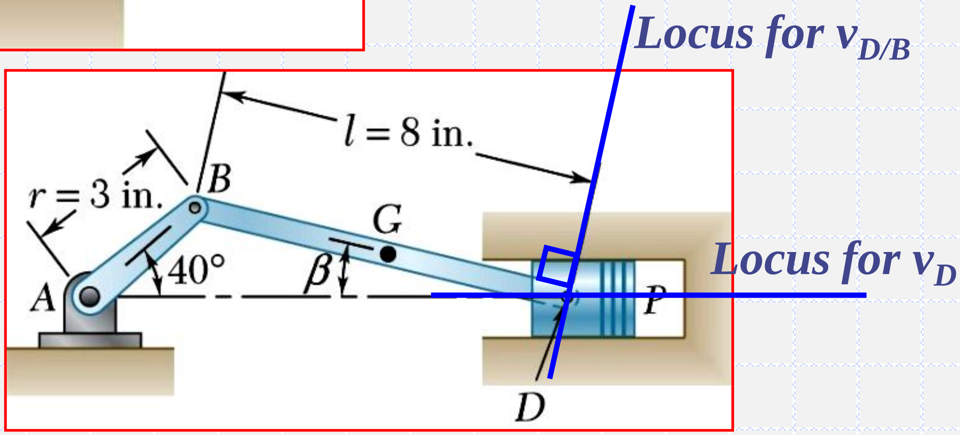


$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B}$$

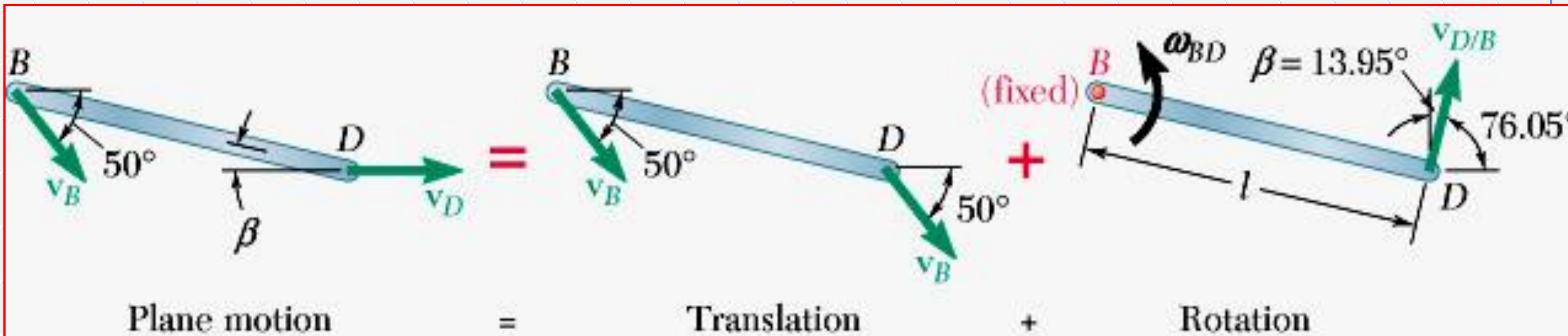


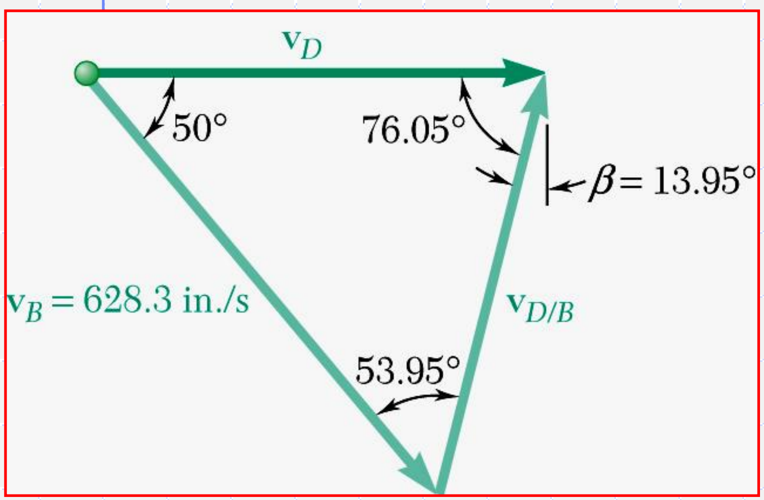
$$\omega_{AB} = \left(2000\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{\text{min}}{60\,\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 209.4\ \text{rad/s}$$

$$v_B = (AB)\,\omega_{AB} = (3\text{in.})(209.4\ \text{rad/s})$$



$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B}$$





$$v_D = 523.4 \, in/s = 43.6 \, ft/s$$

$$v_{D/B} = 495.9 \, in/s$$

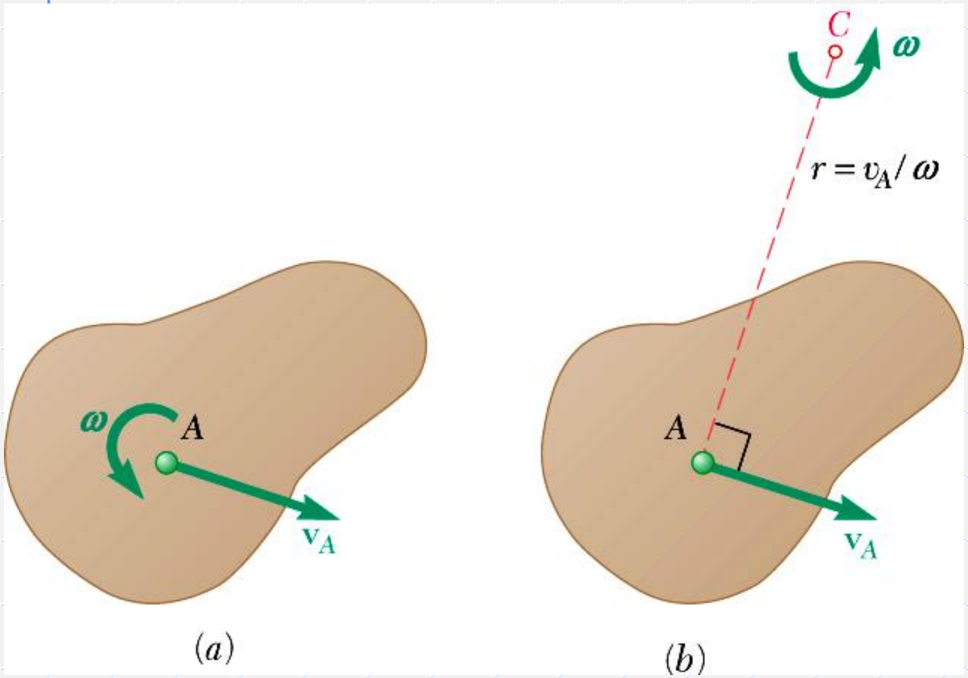
$$v_{D/B} = l\,\omega_{BD}$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_{D/B}}{l} = \frac{495.9 \, in/s}{8in} = 62.0 \, rad/s$$

مرکز آنی دوران (نقطه سرعت صفر)

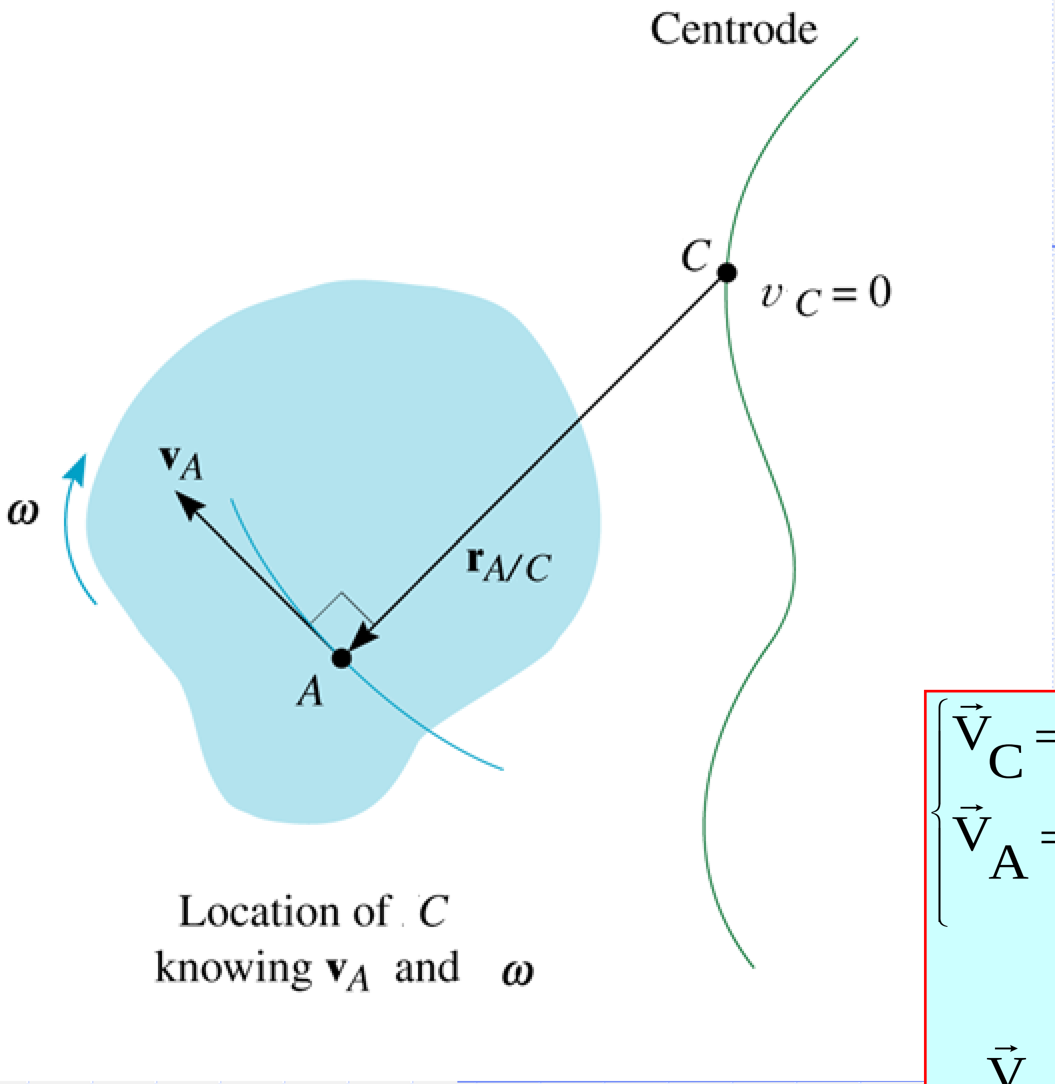
Instantaneous Center of Rotation

(نقطه C با سرعت صفر) مرکز آنی دوران است که لزوماً میتواند روی جسم نباشد.



(a) (b)

تکیه گاه ها در تمام لحظات مرکز آنی دوران می باشند.

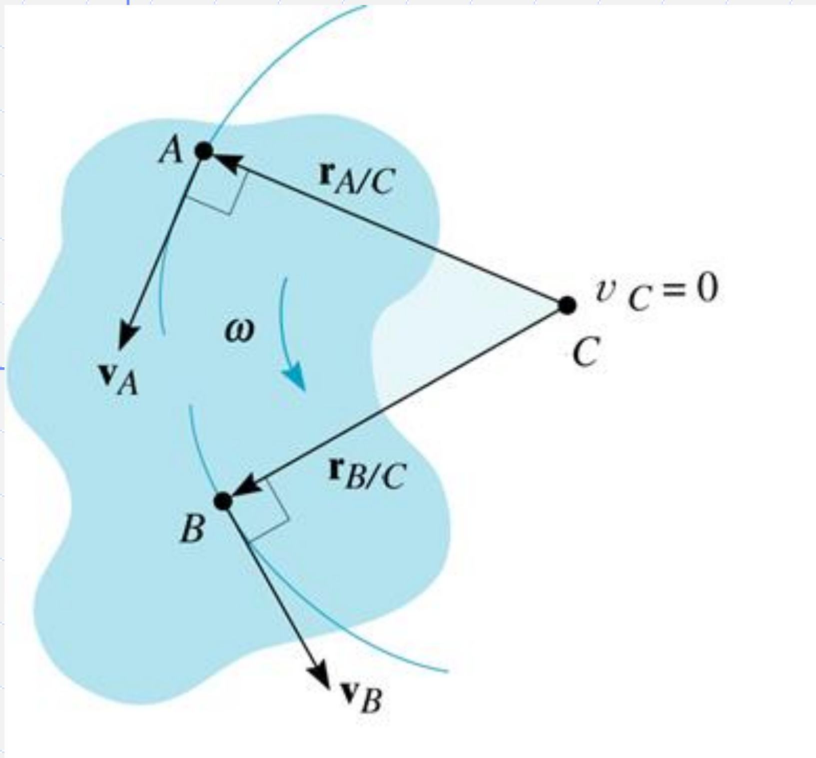


$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}$$

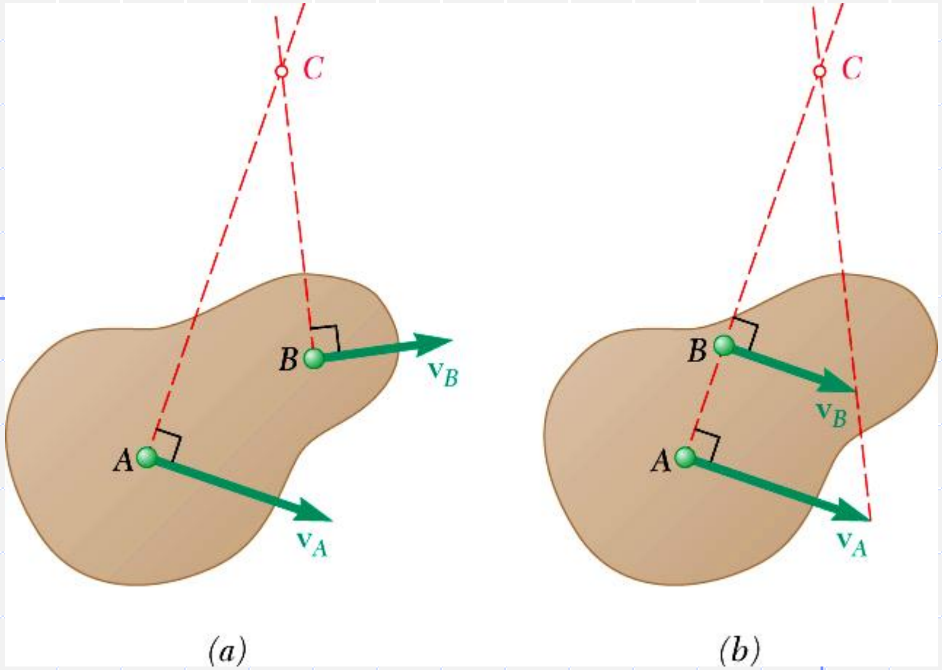
$$\begin{cases} \vec{V}_C = 0 \\ \vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \end{cases}$$

$$\vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C}$$

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}} \quad \text{and} \quad \boxed{\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/C}}$$



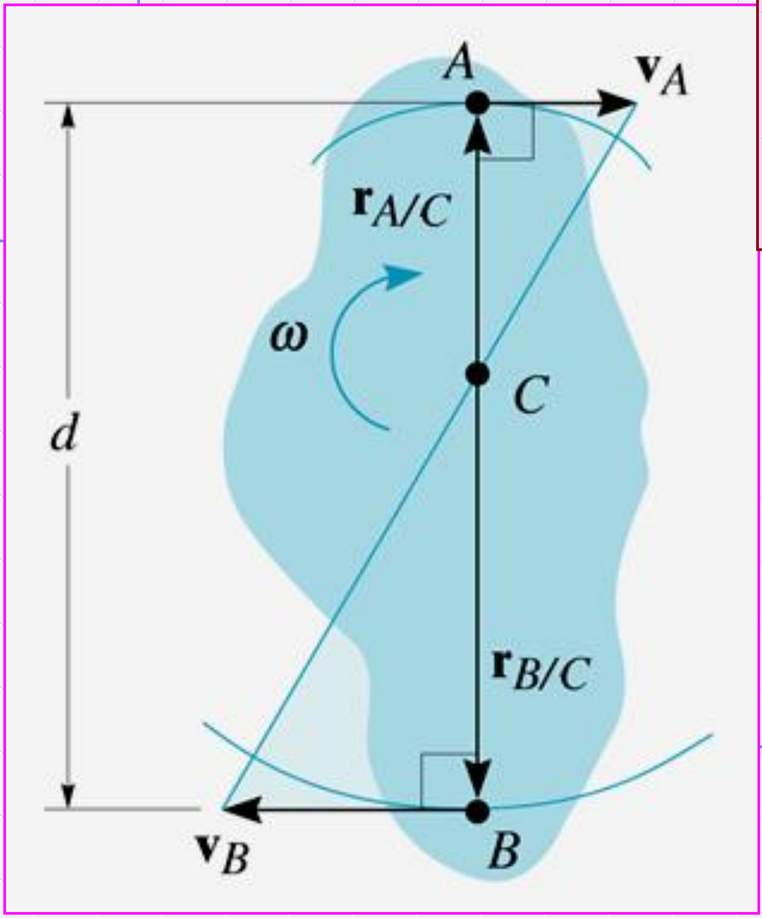
Location of C
knowing the lines of action of $\mathbf{v}_A$ and $\mathbf{v}_B$

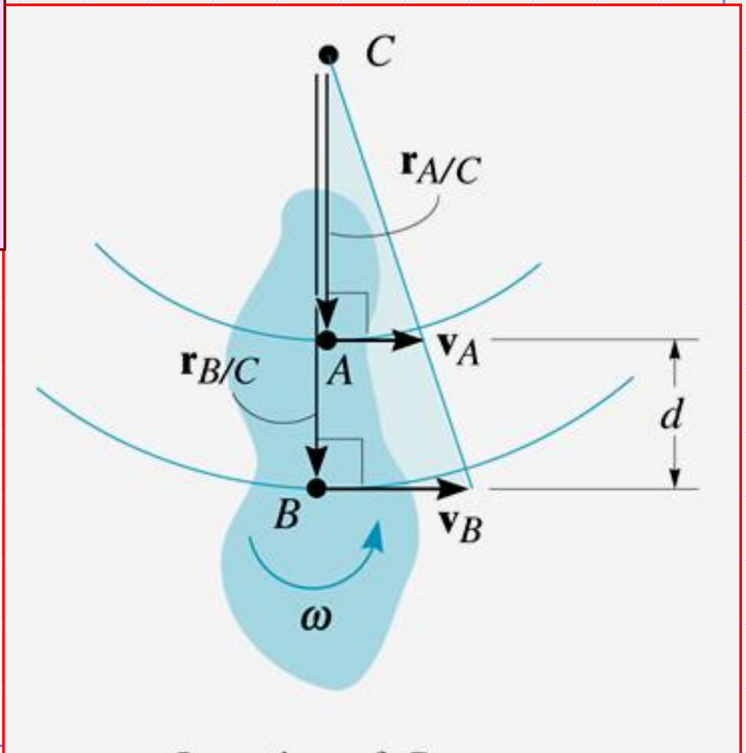


$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}$$

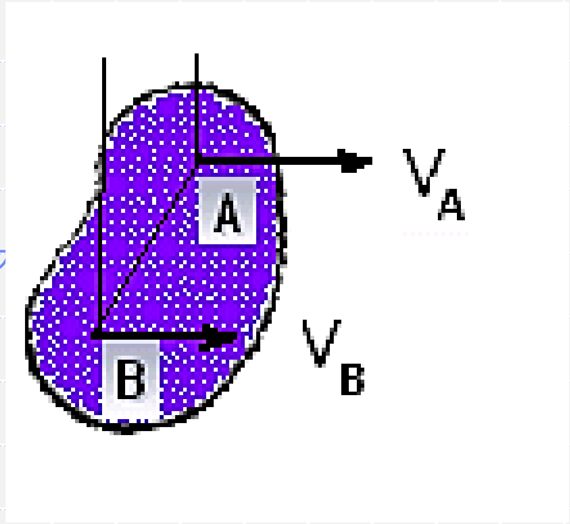
$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/C}$$

$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A \perp AB$$
$$V_A \neq V_B$$

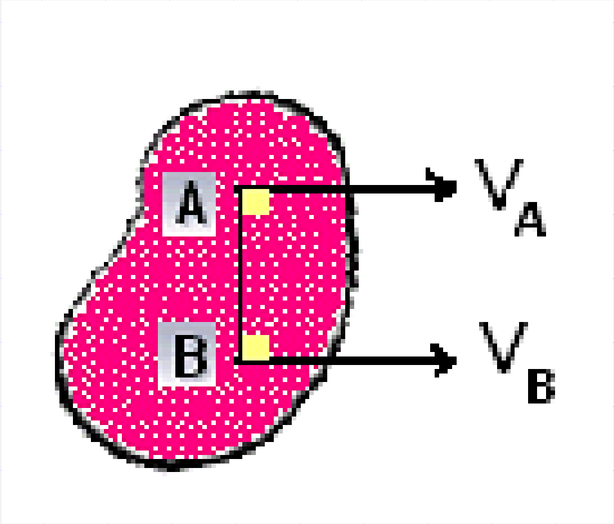




Location of C knowing $\mathbf{v}_A$ and $\mathbf{v}_B$



$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A \perp AB$$
$$\omega = 0$$



$$V_A \perp AB$$
$$V_A \parallel V_B$$

سرعت زاویه ای لزوماً صفر نیست

مثال :

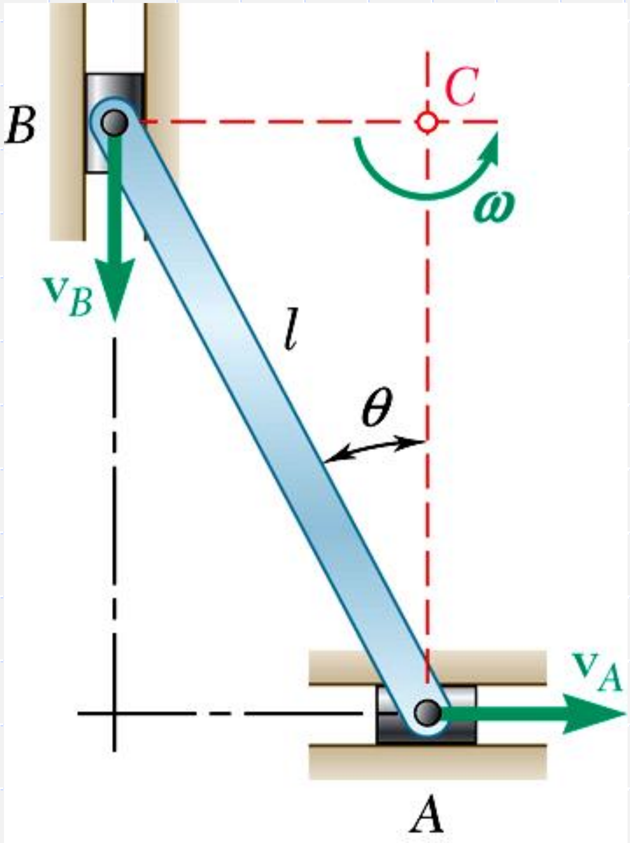
✓ $= v_A$ $\quad v_B = ?$ $\quad \omega = ?$

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l\cos\theta}$$

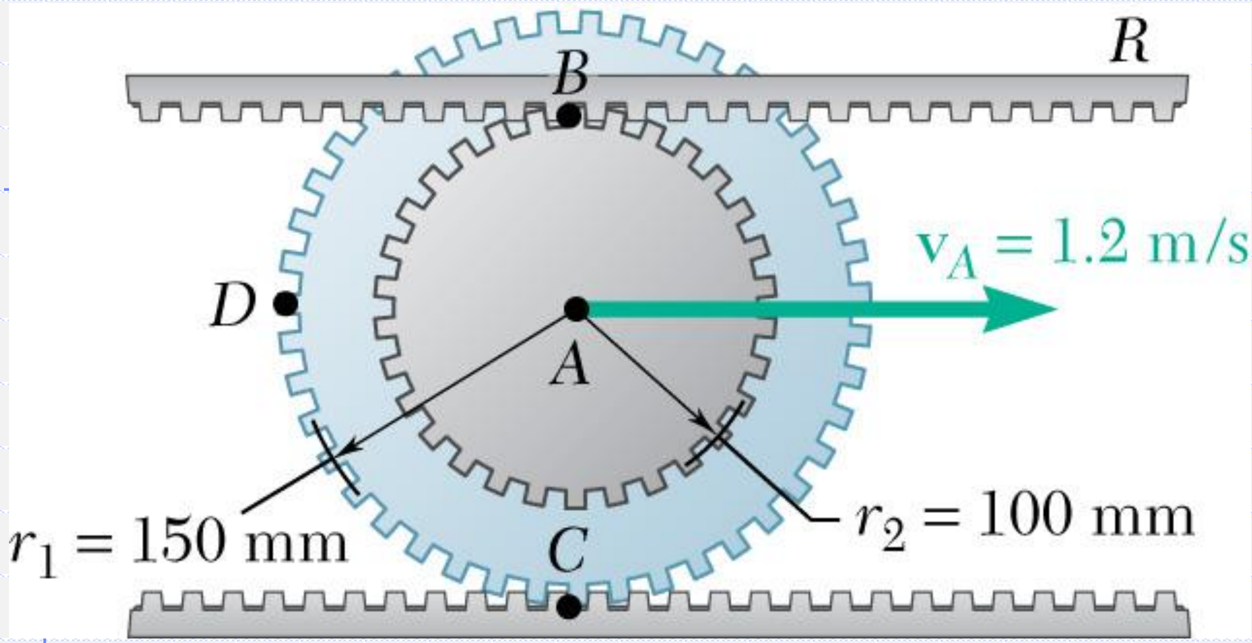
$$v_B = (BC)\omega = (l\sin\theta)\frac{v_A}{l\cos\theta}$$

$$= v_A \tan\theta$$

سرعت هر نقطه از این میله بدست خواهد آمد.



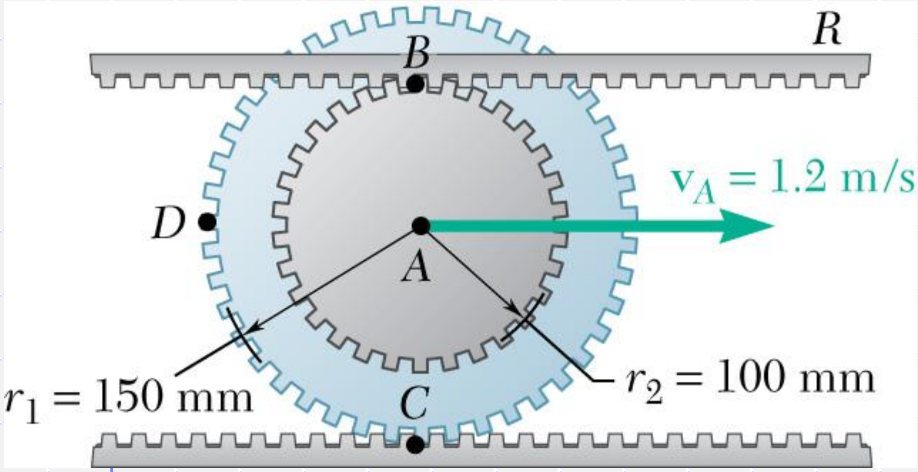
مثال :

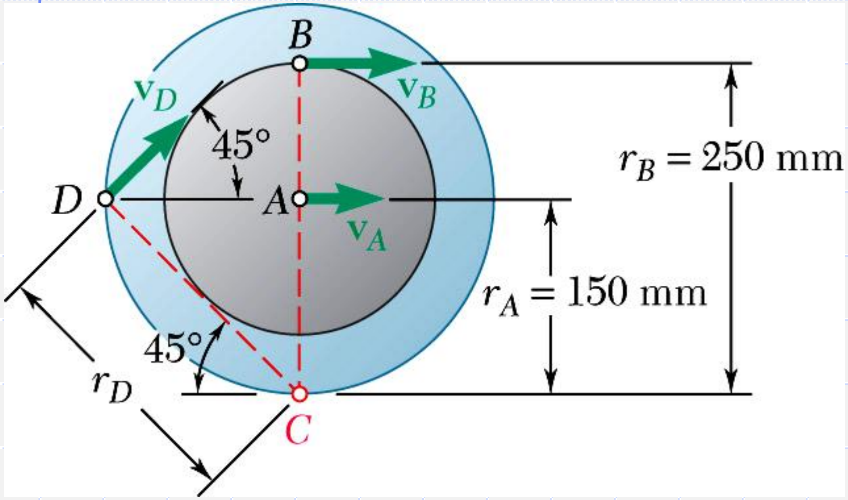


مرکز چرخ دنده مزدوج روی ریل دندانه دار ثابت پائینی با سرعت 1.2 m/s در حال حرکت میباشد. مطلوبست: سرعت زاویه ای چرخ دنده و سرعت نقاط B و D از چرخ دنده و سرعت ریل دندانه دار متحرک بالائی.

حل :

با توجه به ثابت بودن ریل پائینی و تماس چرخ دنده با آن، نقطه پائینی آن چرخ دنده، نقطه مرکز آنی دوران می باشد.





$$v_A = \omega r_A$$

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{1.2}{0.15} = 8\,{}^{rad}\!/_{s}$$

$$v_R = v_B = \omega r_B = (8)(0.25)$$

$$= \left(2\,{}^{m}\!/_{s}\right)\vec{i}$$

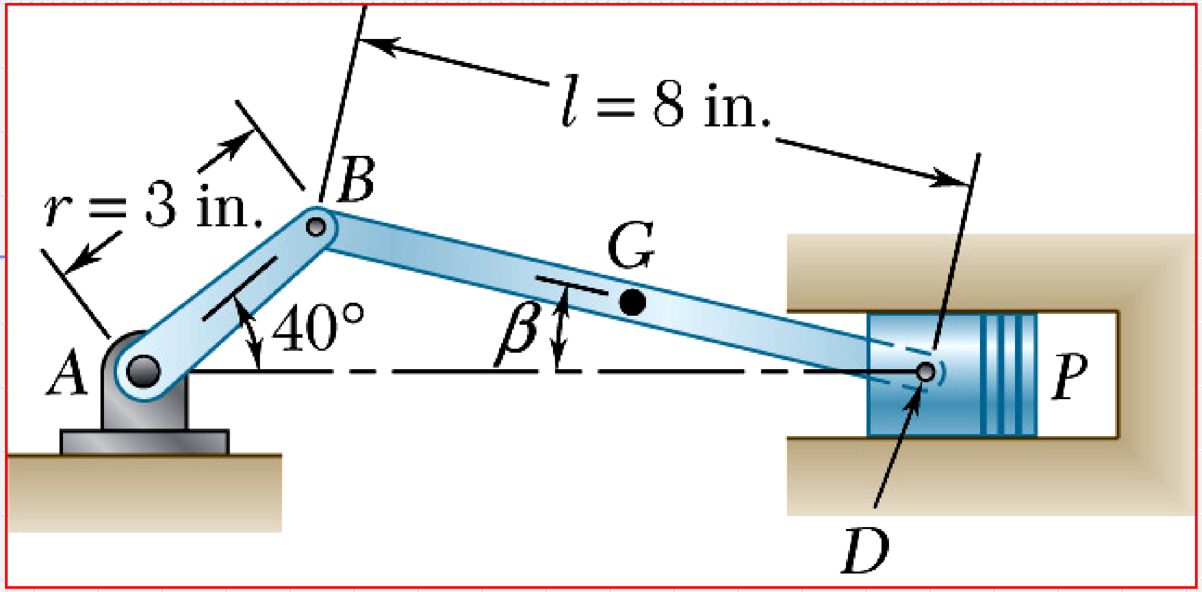
$$r_D = (0.15\ )\sqrt{2} = 0.2121\ \text{m}$$

$$v_D = \omega r_D = (8)(0.2121)$$

$$v_D = 1.697\,{}^{m}\!/_{s}$$

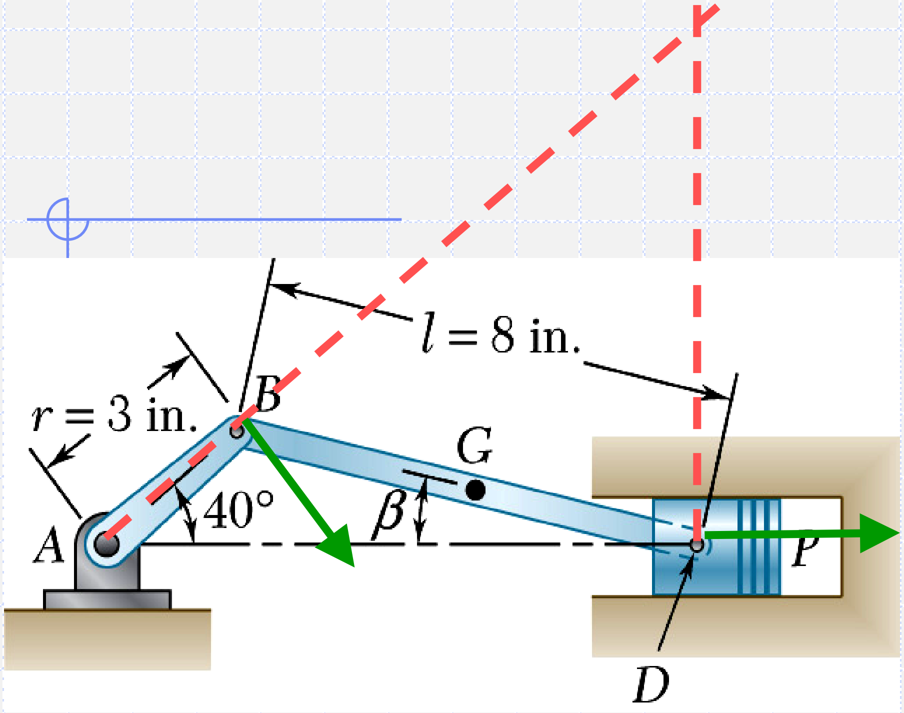
$$\vec{v}_D = \left(1.2\vec{i} + 1.2\vec{j}\right)\,{}^{m}\!/_{s}$$

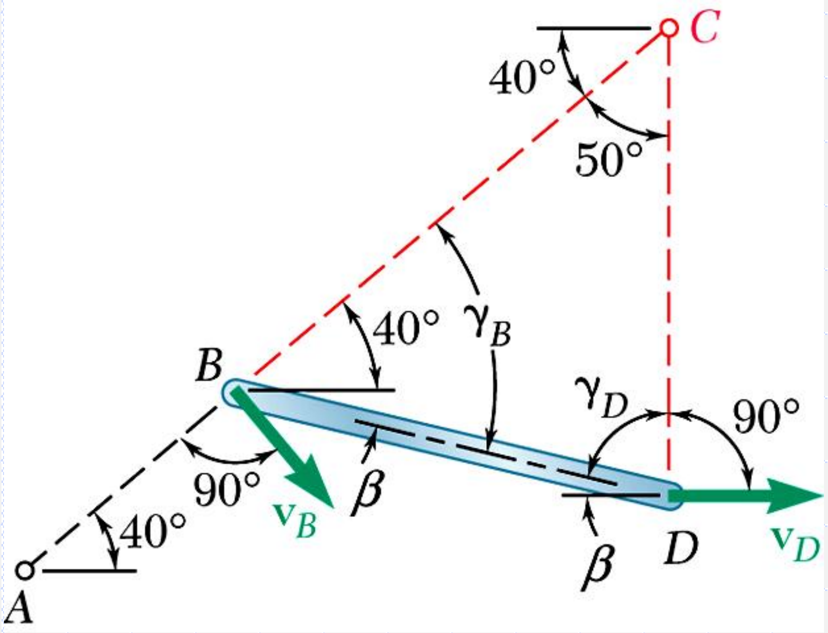
مثال :



میل لنگ AB دارای سرعت زاویه ای ثابت ساعتگرد 2000 دور در دقیقه است.
مطلوبست: سرعت زاویه ای میله BD و سرعت پیستون P در موقعیت نشان داده شده.

حل :

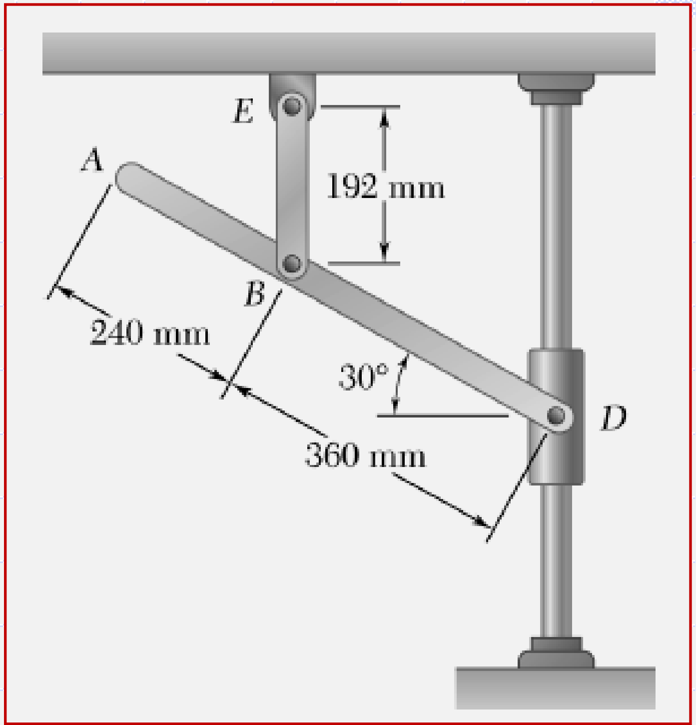




$$v_B = \omega_{AB}(AB) = \omega_{BD}(BC)$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{BC}$$

$$v_D = \omega_{BD}(CD)$$



مثال : طوقه D با سرعت $1.6 \, m/s$ به سمت بالا در حال حرکت می باشد .

مطلوب است : $\omega_{AD}=?\ ,\ V_B=?\ ,\ V_A=?$

حل : برای میله BE نقطه E مرکز دوران است

$$V_D=(DC)\,\omega_{AD}$$

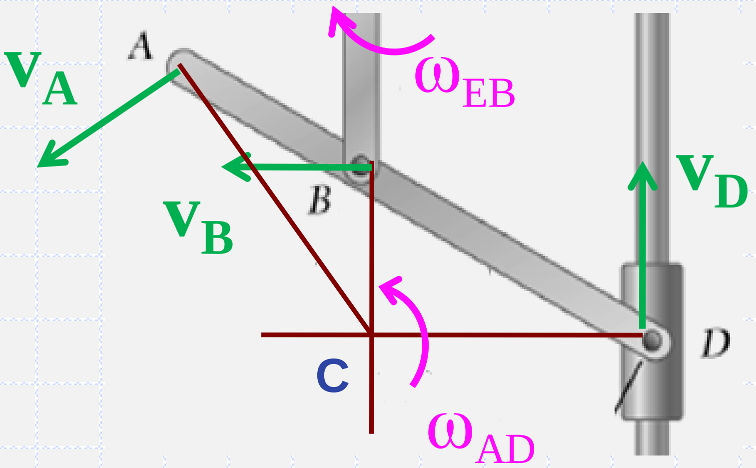
$$\omega_{AD}=\frac{V_D}{DC}=\frac{1.6}{0.36\cos 30^\circ}=5.13 \ \ rad/s$$

$$V_B=(BC)\,\omega_{AD}=(0.36\sin 30^\circ)(5.13)$$
$$=0.92 \ \ m/s$$

$$AC=\sqrt{(0.6\sin 30^\circ)^2+(0.24\cos 30^\circ)^2}$$
$$=0.36 \ \ m$$

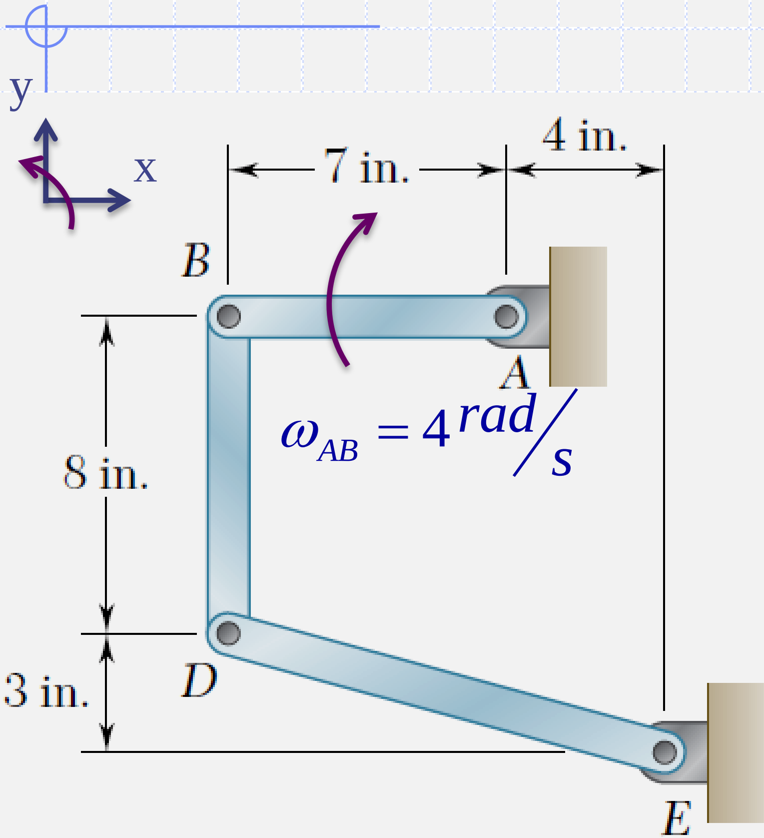
$$V_A=(AC)\,\omega_{AD}=(0.36)(5.13)$$
$$=1.87 \ \ m/s$$

34.7°



مثال: میله AB دارای سرعت زاویه ای ساعتگرد ۴ رادیان در ثانیه است.

مطلوبست: سرعت زاویه ای میله های BD و DE در موقعیت نشان داده شده.



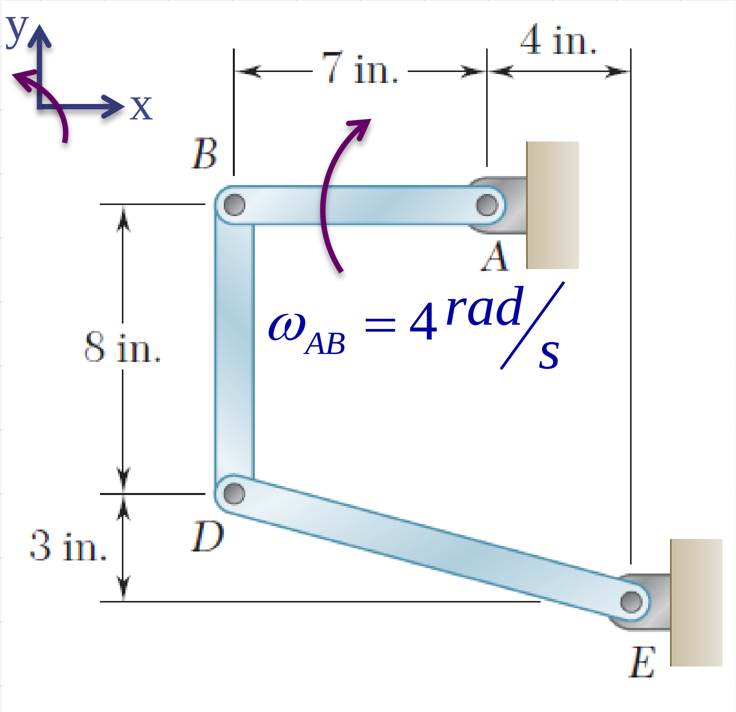
$$\boxed{\mathbf{v}_B = \cancelto{0}{\mathbf{v}_A} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{AB} = -(4)\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = -(7)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \boldsymbol{r}_{B/A} = (-4\mathbf{k}) \times (-7\mathbf{i})$$

$$\mathbf{v}_B = (28 \text{ in./s})\ \mathbf{j}$$



$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega_{BD}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_{D/B} = -(8\ )\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BD} \times \mathbf{r}_{D/B} = 28\mathbf{j} + (\omega_{BD}\mathbf{k}) \times (-8\mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_D = 28\,\mathbf{j} + 8\,\omega_{BD}\,\mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{r}_{D/E} = -(11)\mathbf{i} + (3)$$

$$\mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{r}_{D/E} = (\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (-11\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_D = -11\omega_{DE}\,j - 3\omega_{DE}\,i$$

j: $\quad 28 = -11\omega_{DE} \Rightarrow \omega_{DE} = -2.55 \text{ rad/s}$

i: $\quad 8\omega_{BD} = -3\omega_{DE} \Rightarrow \omega_{BD} = -\dfrac{3}{8}\omega_{BD}$

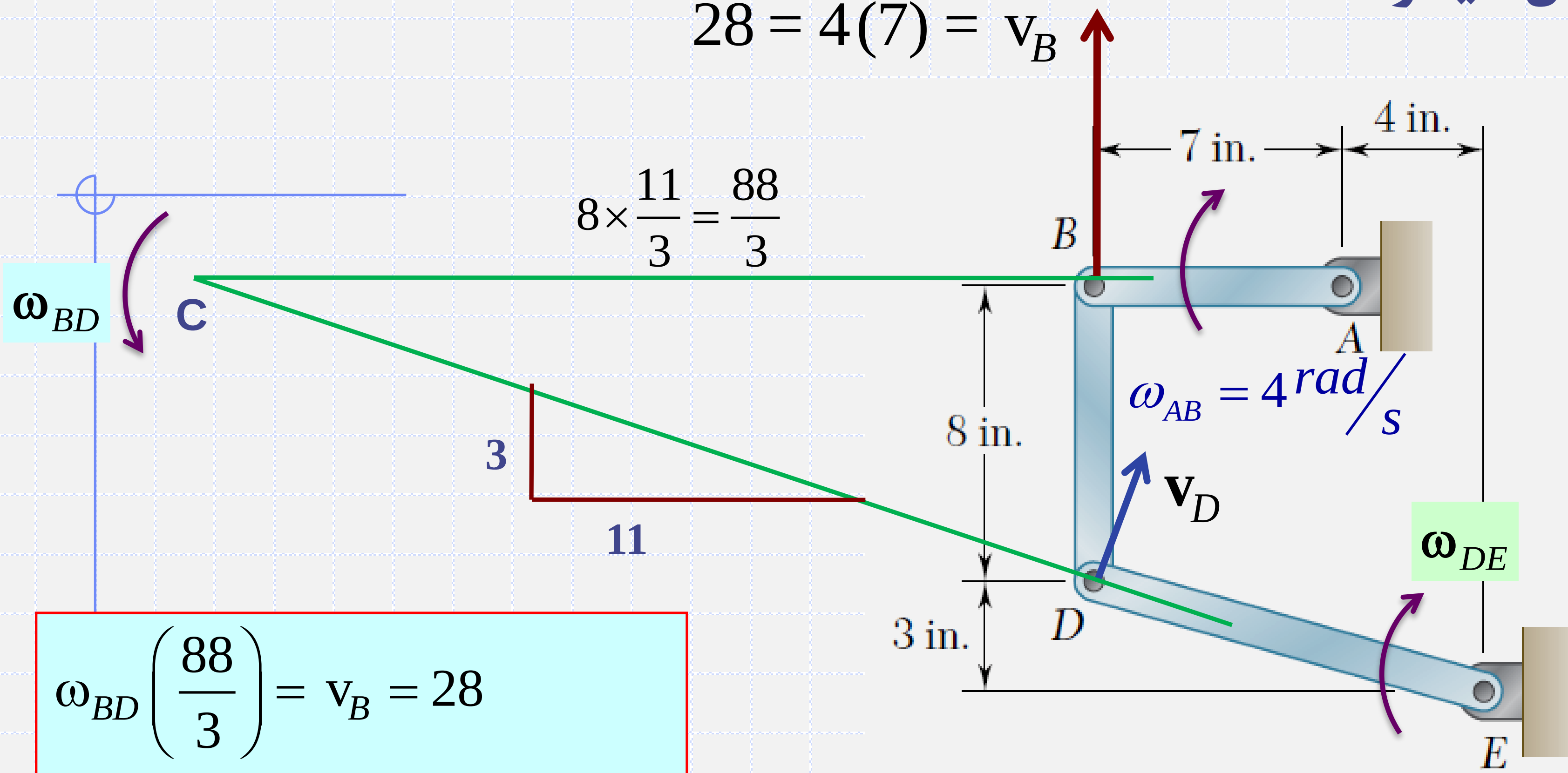
$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = 2.55 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = 0.96 \text{ rad/s}$$

راه حل دیگر :

$$28 = 4(7) = v_B$$

$$8 \times \frac{11}{3} = \frac{88}{3}$$



$$\omega_{BD}\left(\frac{88}{3}\right) = v_B = 28$$

$$\omega_{BD} = \left(\frac{28 \times 3}{88}\right) = 0.96\ rad/s$$

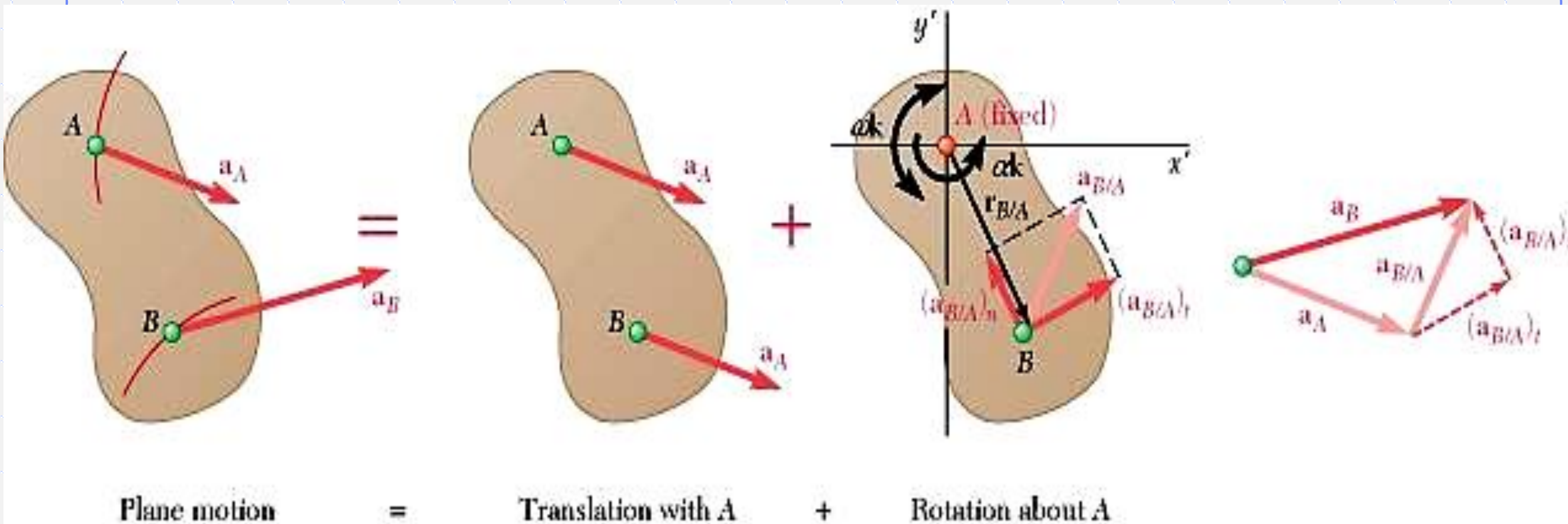
$$v_D = (CD)\,\omega_{BD} = (DE)\,\omega_{DE}$$

$$8\,\omega_{BD} = 3\omega_{DE} \qquad \omega_{DE} = \frac{8}{3}\omega_{BD}$$

$$\omega_{DE} = 2.55\ rad/s$$

شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه‌ای

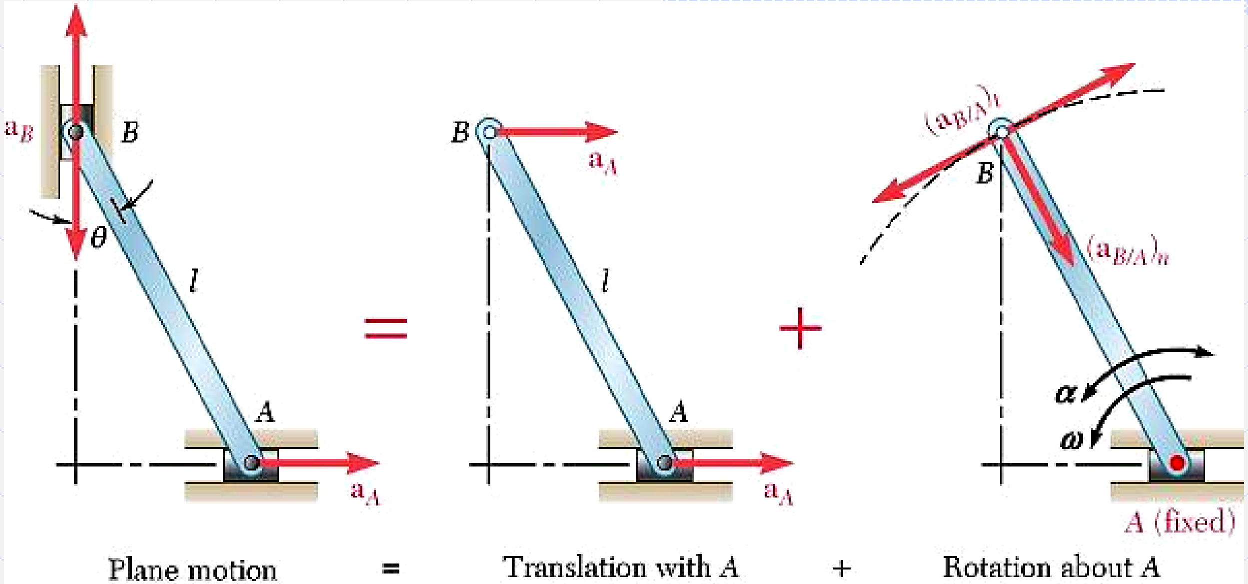
Absolute and Relative Acceleration



$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}}$$

$$\boxed{\left(a_{B/A}\right)_t = r\alpha \qquad \left(a_{B/A}\right)_n = r\omega^2}$$

مثال :



$a_A = \surd$

$a_B = ?$

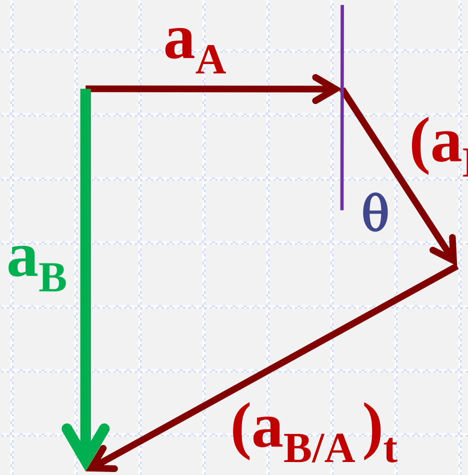
$\omega = \surd$

$\alpha = ?$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t$$

Acceleration Diagram

دیاگرام شتاب

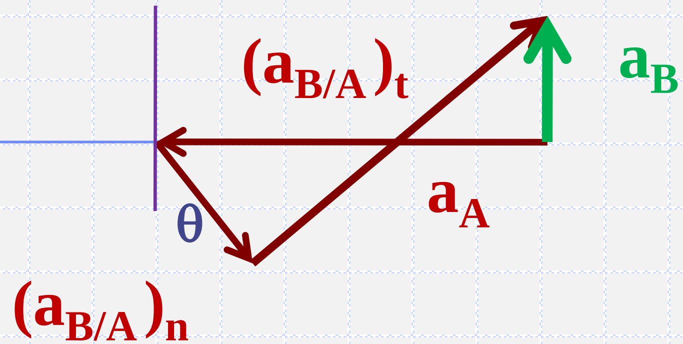


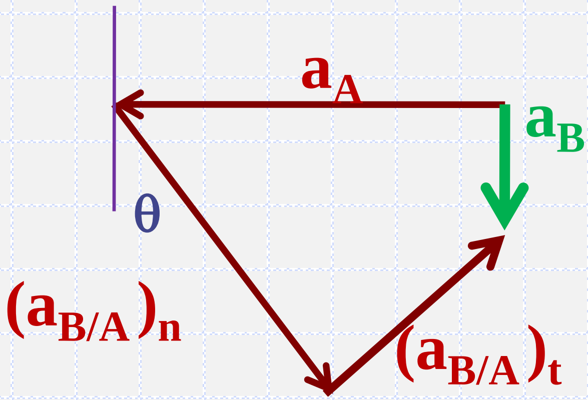
$$\left(a_{B/A}\right)_t = (AB)\alpha$$

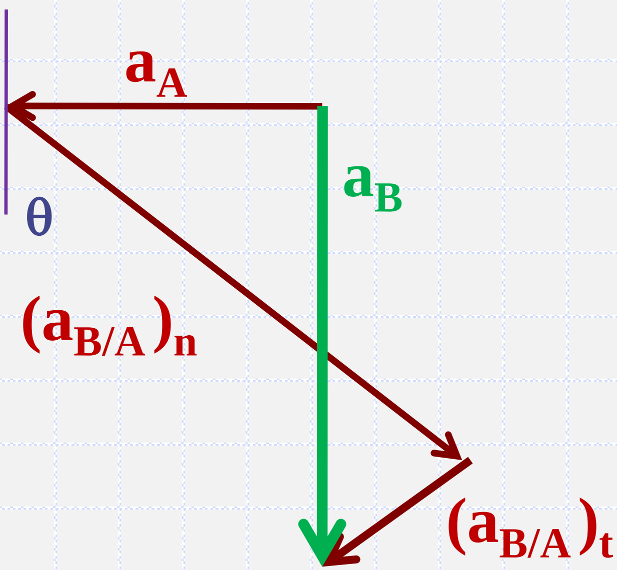
$$\left(a_{B/A}\right)_n = (AB)\omega^2$$

Acceleration Diagram

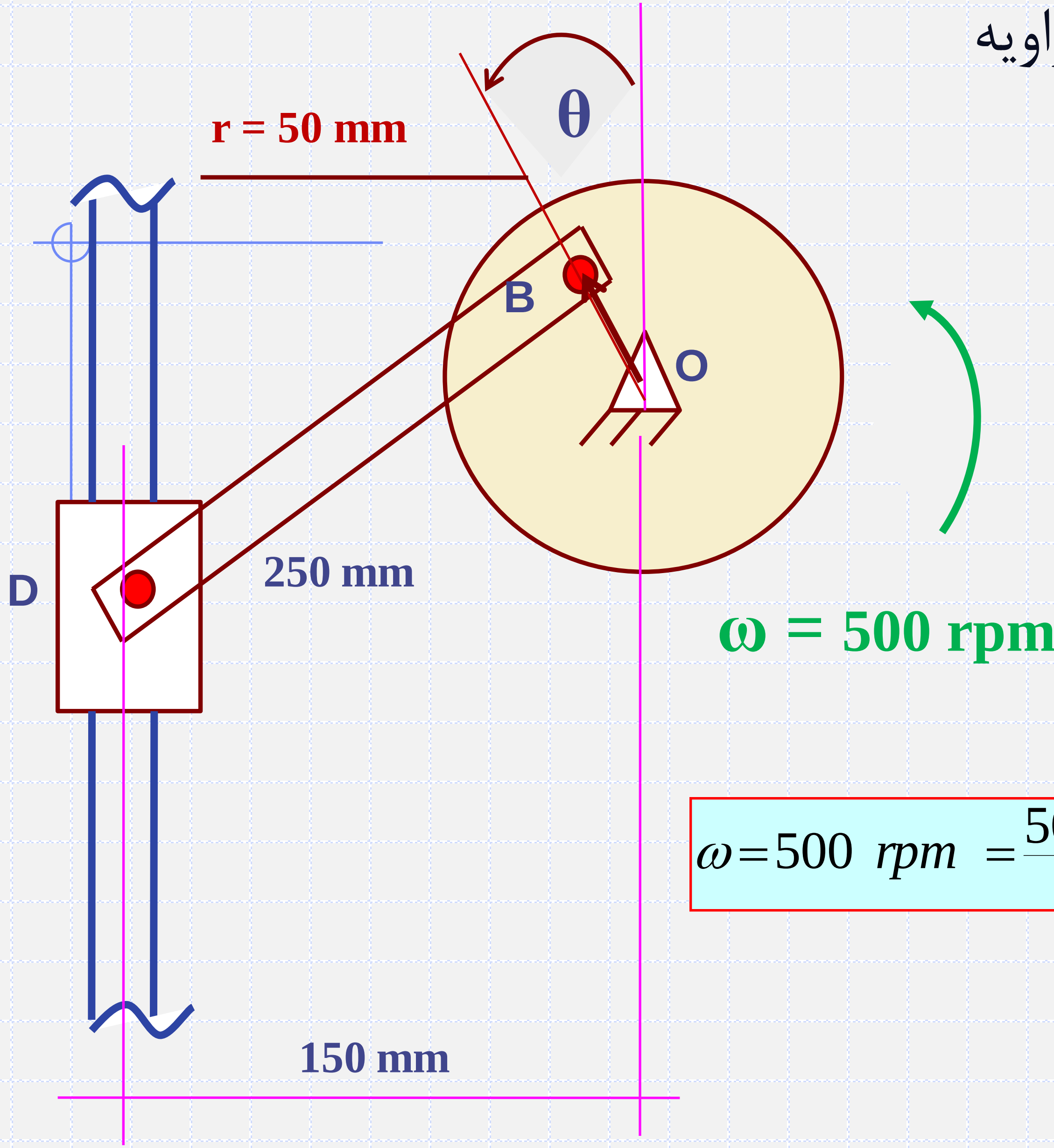
دیاگرام شتاب برای حالتی که جهت شتاب A در جهت مخالف مثال قبلی باشد.







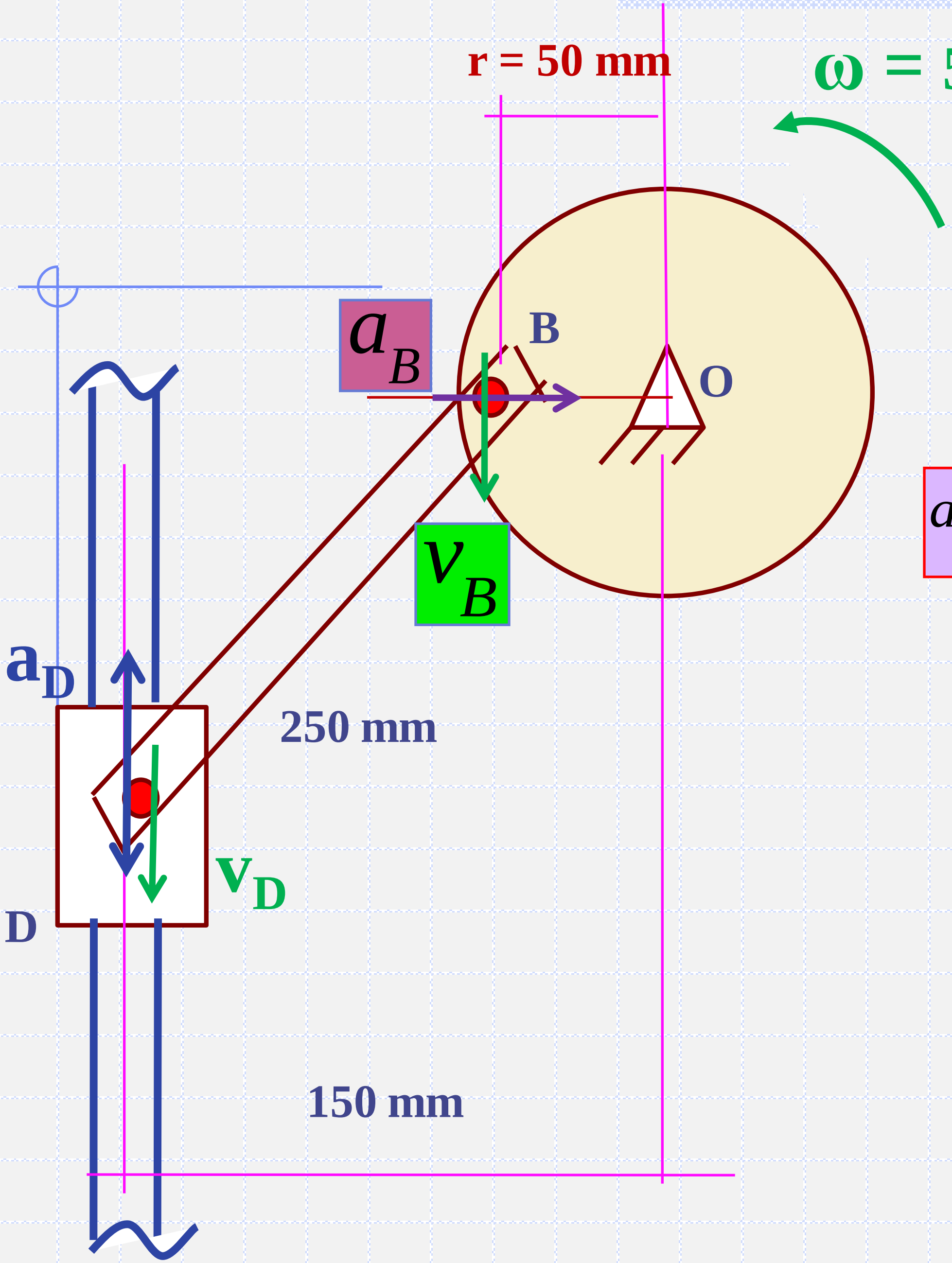
مثال : اگر دیسک با سرعت زاویه ای ثابت درحال دوران باشد،
مطلوبست: شتاب طوقه D در حالت $\theta=90^\circ$, $\theta=180^\circ$



$$\omega = 500\ rpm\ = \frac{500\times 2\pi}{60} = 52.36\ {rad}/{s}$$

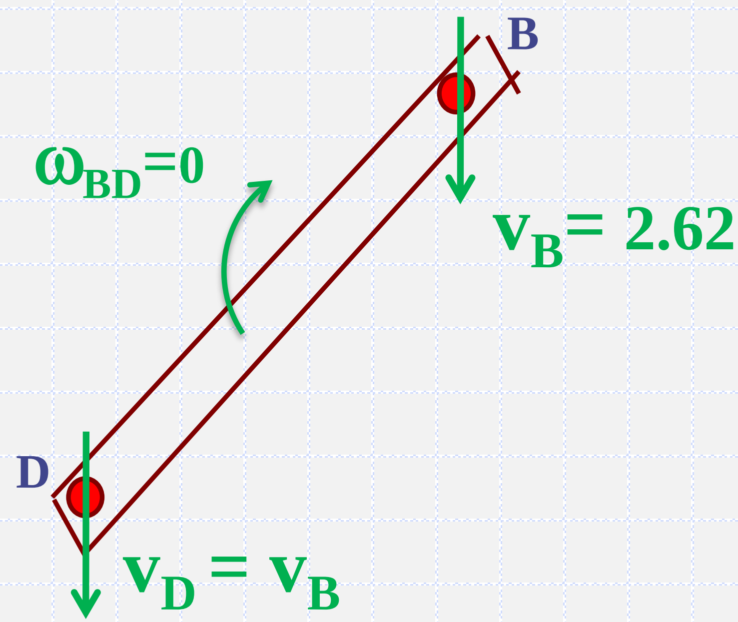
$\theta = 90^{o}$

ω = 500 rpm

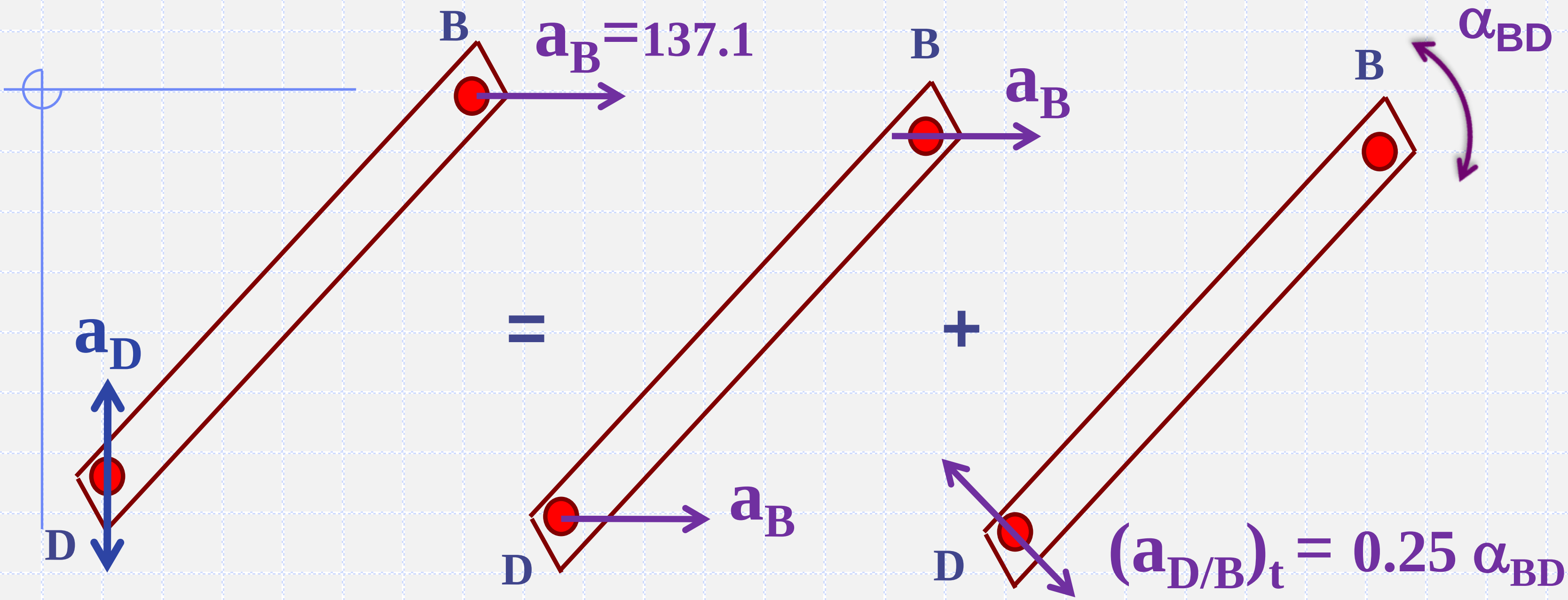


$$v_B = (0.05)(52.96) = 2.62 \downarrow \quad m/s$$

$$a_B = (0.05)(52.36)^2 = 137.1 \rightarrow \quad m/s^2$$

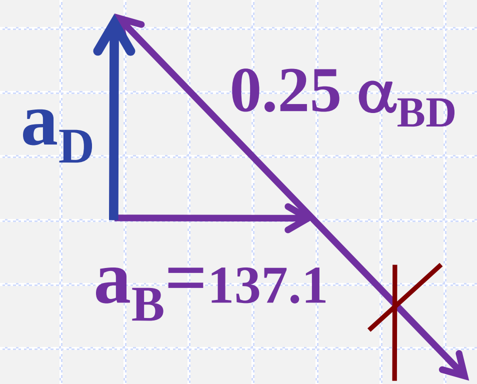


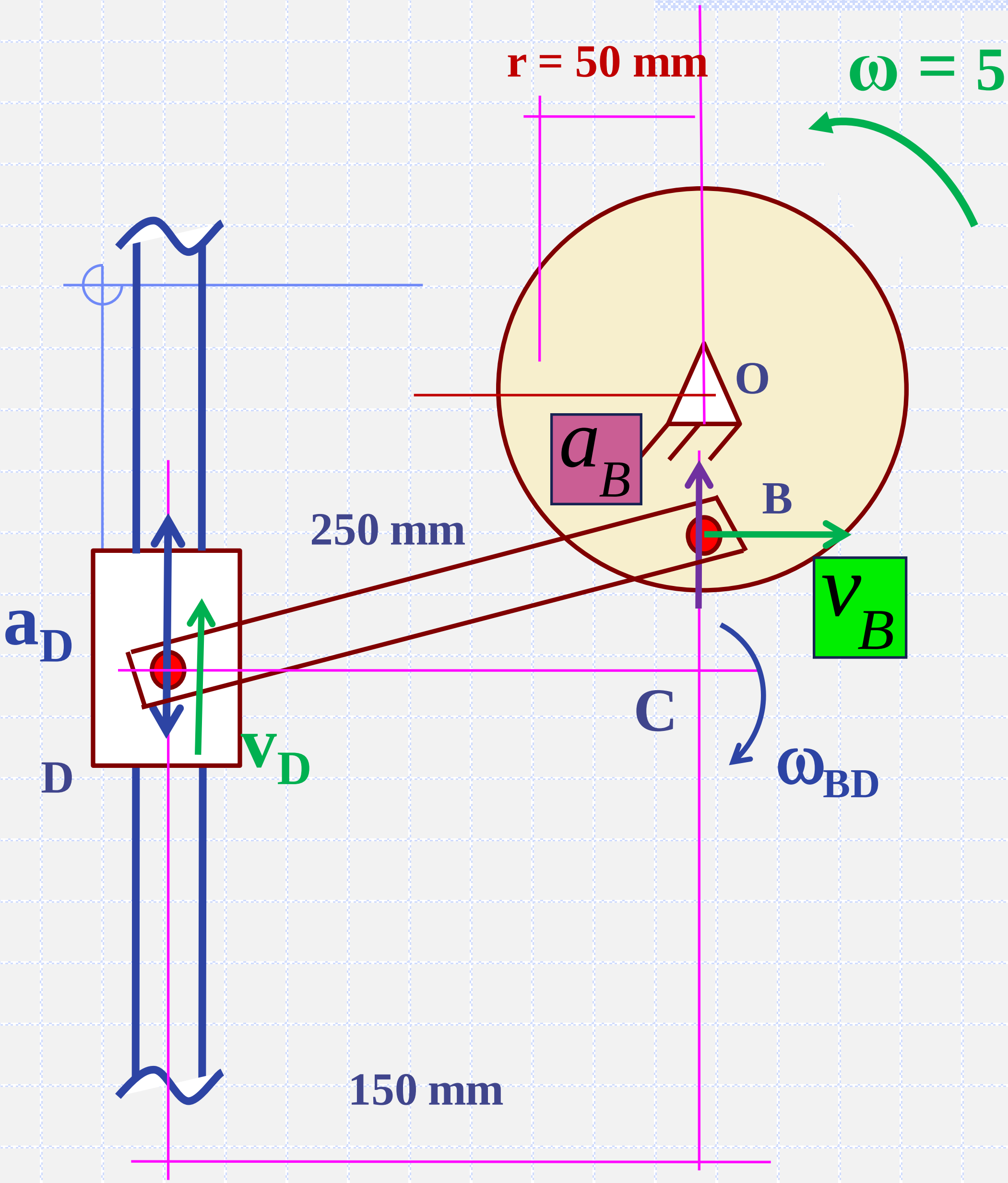
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{D/B})_t$$



$$[a_D \updownarrow] = [137.1 \rightarrow] + [0.25\alpha_{BD} \overset{23.6}{\searrow}]$$

$$a_D = 59.8 \ {}^{m}\!/\!{}_{s^2} \uparrow$$





$\theta = 180^\circ$

$$v_B = (0.05)(52.96) = 2.62 \rightarrow \ {}^{m}/_{s}$$

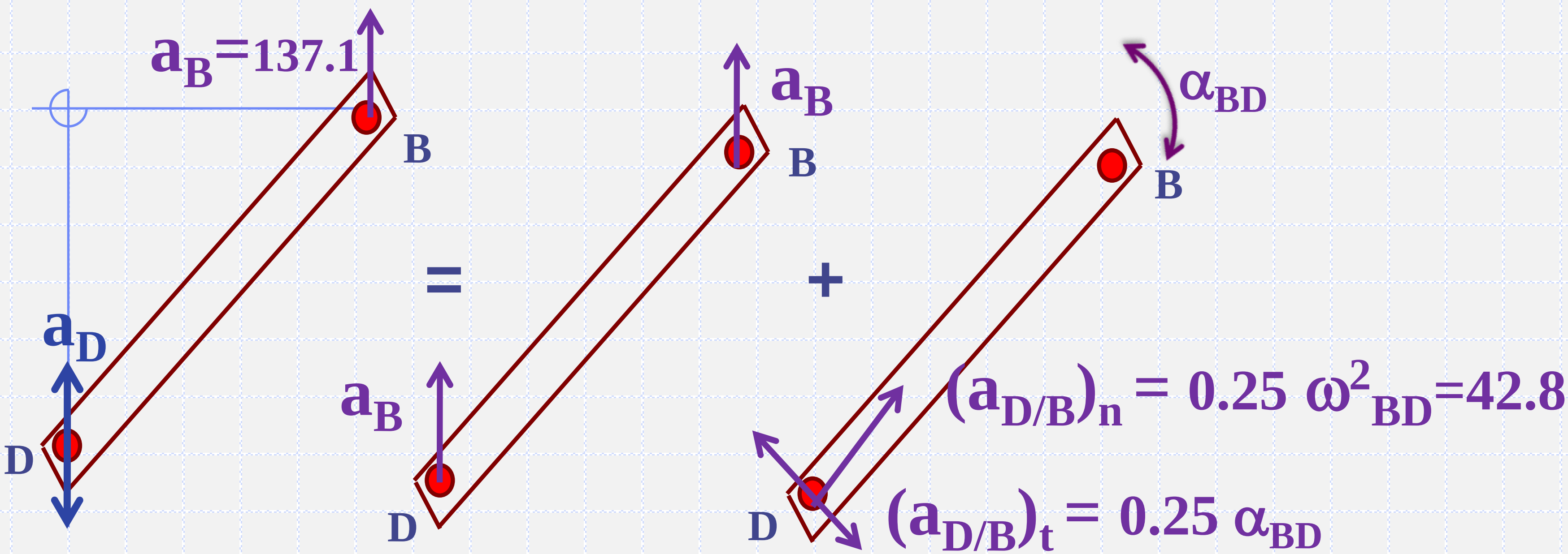
$$a_B = (0.05)(52.36)^2 = 137.1 \uparrow \ {}^{m}/_{s^2}$$

$$v_D = 0.15\,\omega_{BD}$$

$$v_B = 0.20\,\omega_{BD} = 2.62$$

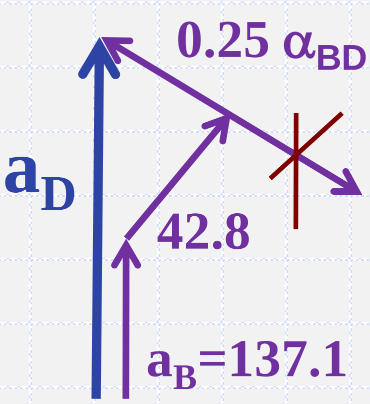
$$\omega_{BD} = 13.1 \ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

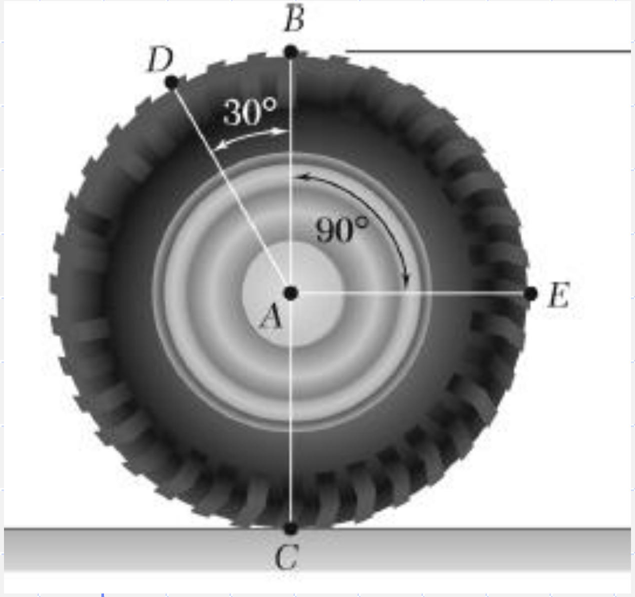
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{D/B})_t$$



$$[a_D \updownarrow] = [137.1 \uparrow] + [42.8 \nearrow] + [0.25\alpha_{BD} \nwarrow\!\!\searrow]$$

$$a_D = 190.65 \uparrow \ m/s^2$$





مثال : سرعت اتومبیلی بصورت ثابت $90\ {}^{km}\!/\!_{hr}$ می باشد. قطر چرخ 550 میلیمتر است.

مطلوبست : $a_C=?,\ a_D=?,\ a_B=?,\ a_E=?$

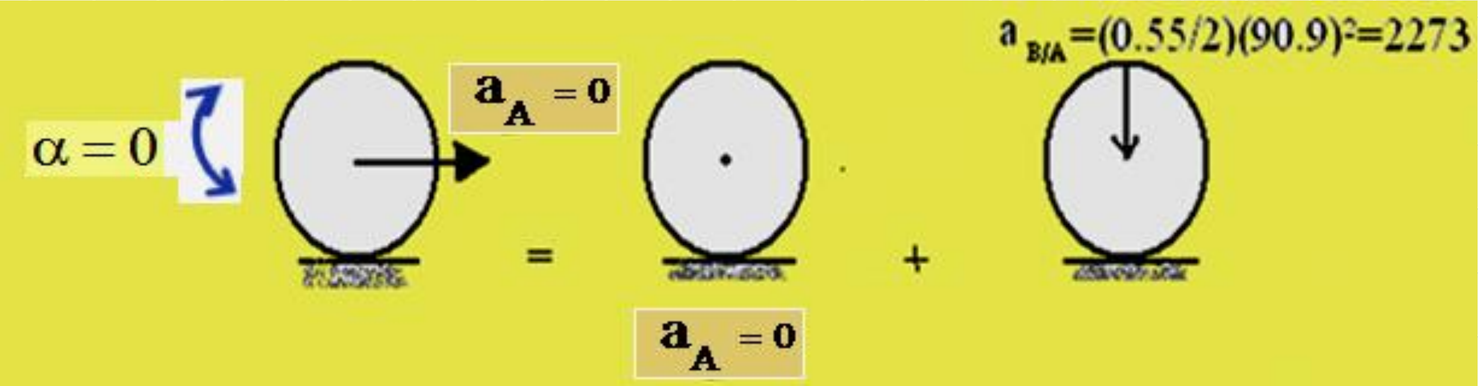
حل :

$$V_A = 90\ {}^{km}\!/\!_{hr} = 25\ {}^{m}\!/\!_{s} \Rightarrow a_A = 0$$

$$V_A = \frac{d}{2}\omega \Rightarrow 25 = \frac{0.55}{2}\omega$$

$$\omega = 90.9\ {}^{rad}\!/\!_{s} \Rightarrow \alpha = 0$$

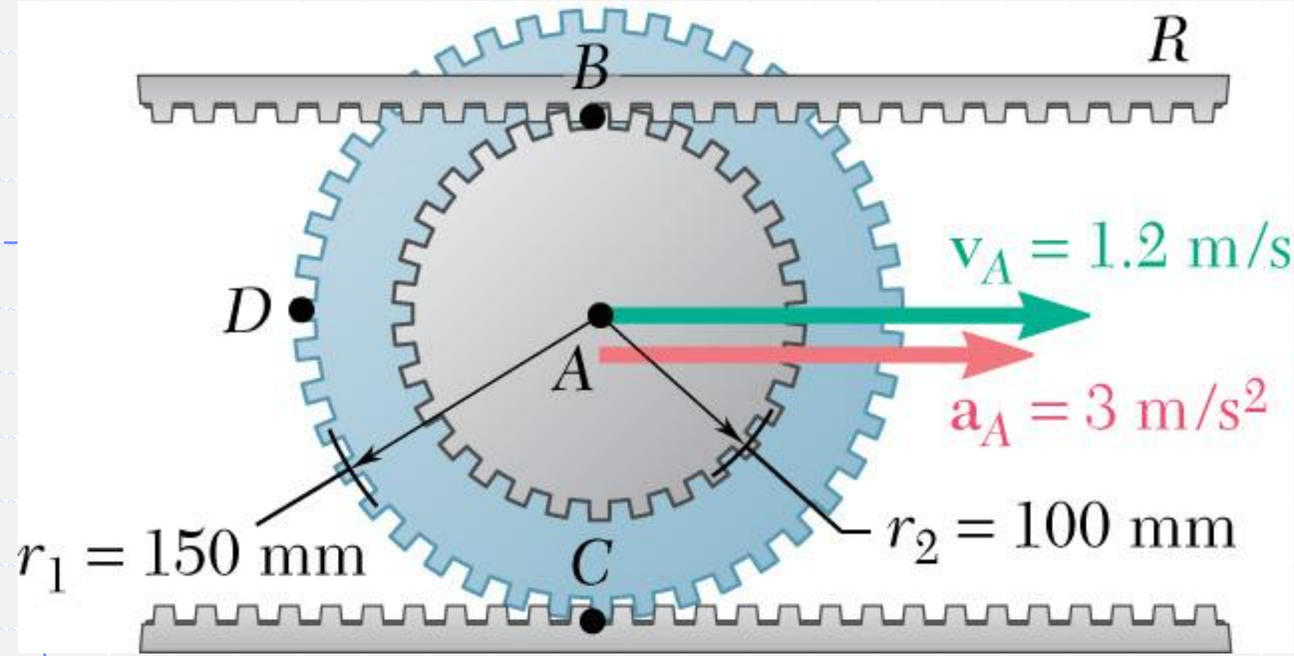
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = 0 + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t = (\vec{a}_{B/A})_n = r\omega^2$$



$$a_B = a_C = a_D = a_E = 2273\ (m/s^2)$$

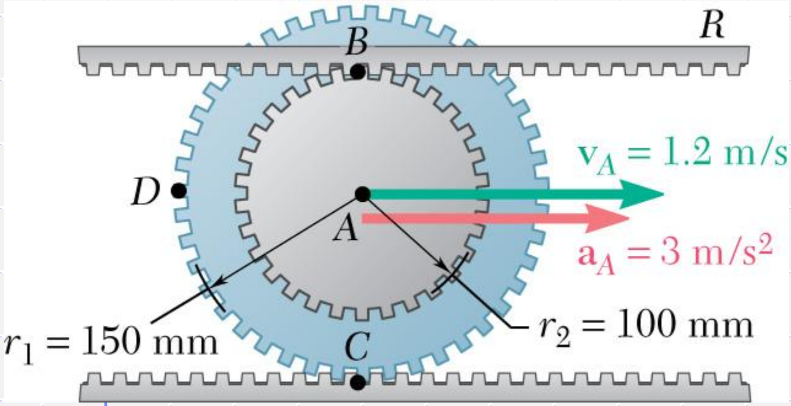
همگی به سمت مرکز هستند.

مثال :



مرکز چرخ دنده مزدوج با سرعت $1.2\,m/s$ و شتاب $3\,m/s^2$ در حال حرکت میباشد. ریل دندانه دار پائینی ثابت است.

مطلوبست: شتاب زاویه ای چرخ دنده و شتاب نقاط B، C و D.



حل :

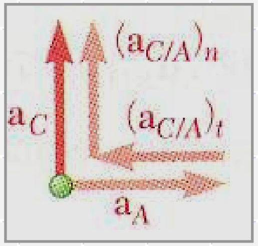
$$v_A = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r} = \frac{1.2}{0.15} = 8\ rad/s$$

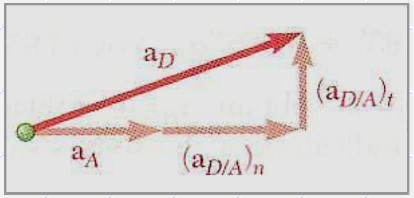
$$a_A = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a_A}{r} = \frac{3}{0.15} = 20\ rad/s^2$$

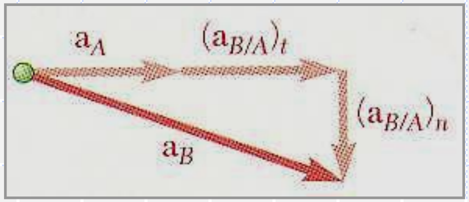
$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \\ &= 3\vec{i} + \omega^2 r(-\vec{j}) + \alpha r\vec{i} \\ &= 3\vec{i} - (8)^2(0.1)\vec{j} + (20)(0.1)\vec{i} \\ &= 5\vec{i} - 6.4\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_A + \vec{a}_{C/A} \\ &= 3\vec{i} + \omega^2 r(\vec{j}) + \alpha r(-\vec{i}) \\ &= 3\vec{i} + (8)^2(0.15)\vec{j} - (20)(0.15)\vec{i} \\ &= 9.6\vec{j}\end{aligned}$$

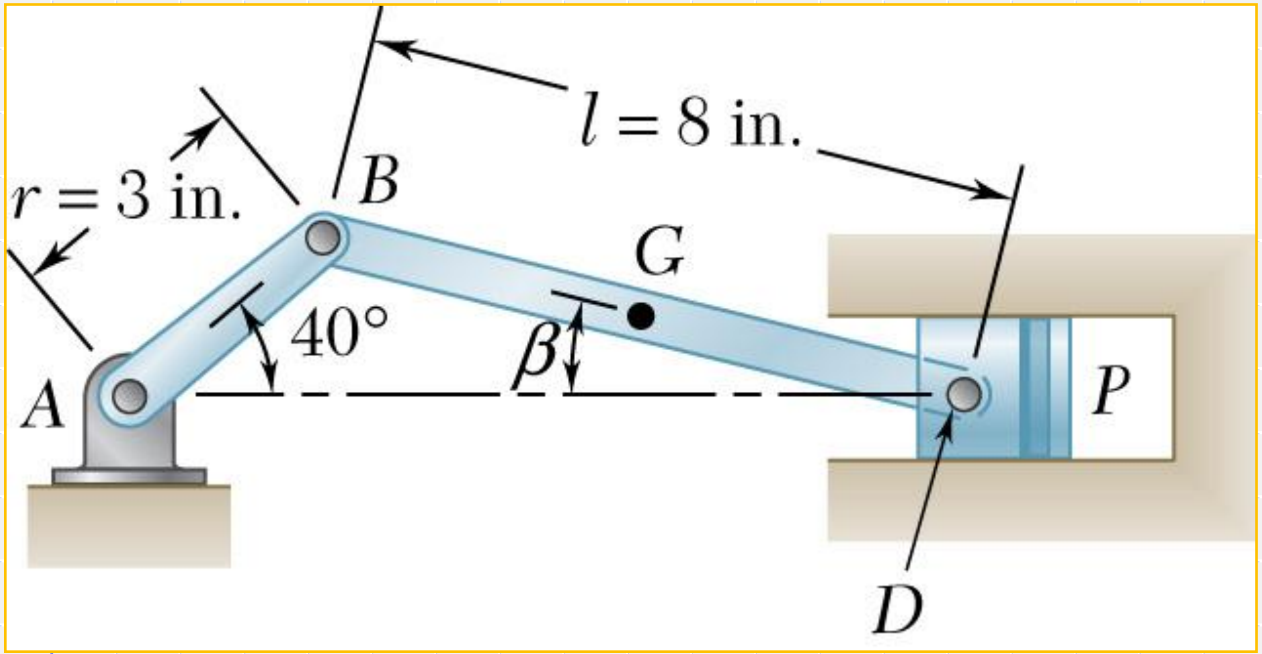
$$\begin{aligned}\vec{a}_D &= \vec{a}_A + \vec{a}_{D/A} \\ &= 3\vec{i} + \omega^2 r(\vec{i}) + \alpha r\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + (8)^2(0.15)\vec{i} + (20)(0.15)\vec{j} \\ &= 12.6\vec{i} + 3\vec{j}\end{aligned}$$





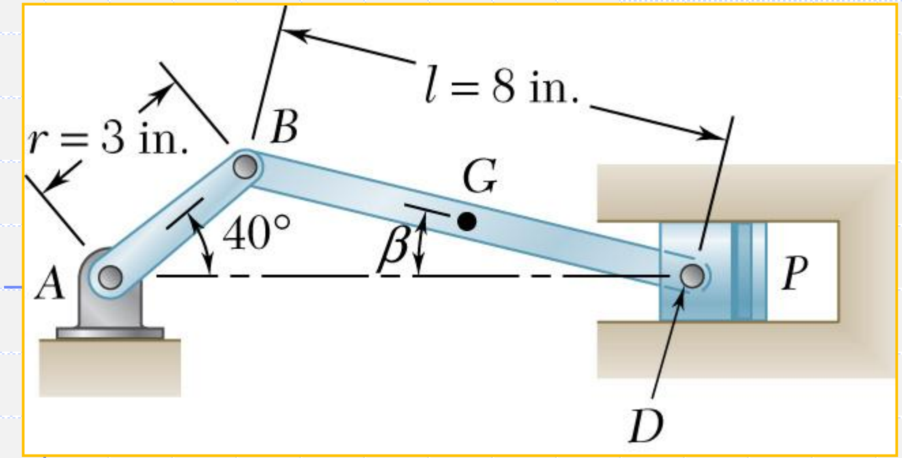


مثال :

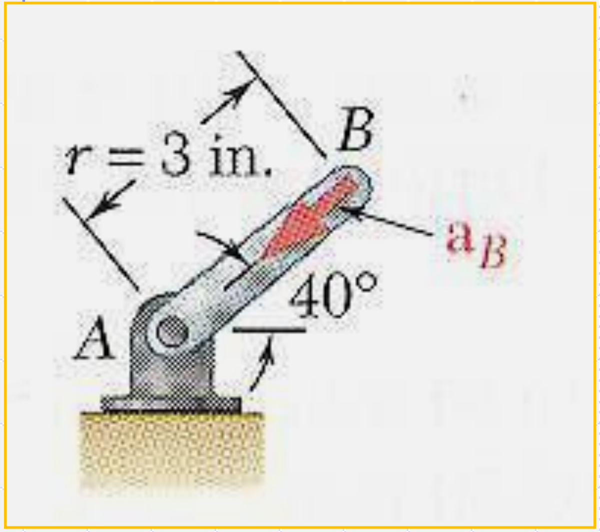


میل لنگ AB دارای سرعت زاویه ای ثابت ساعتگرد 2000 دور در دقیقه است.
مطلوبست: شتاب زاویه ای میله BD و شتاب پیستون P در موقعیت نشان داده شده.

حل :



$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$$
$$= \vec{a}_B + \left(\vec{a}_{D/B}\right)_t + \left(\vec{a}_{D/B}\right)_n$$



$$\omega_{AB} = 2000 \quad rpm$$
$$= 209.4\ {rad}/{s} = \text{constant}$$
$$\alpha_{AB} = 0$$
$$a_B = r\omega_{AB}^2 = \left(\frac{3}{12}\ ft\right)\left(209.4\ {rad}/{s}\right)^2$$
$$= 10.962\ {ft}/{s^2}$$

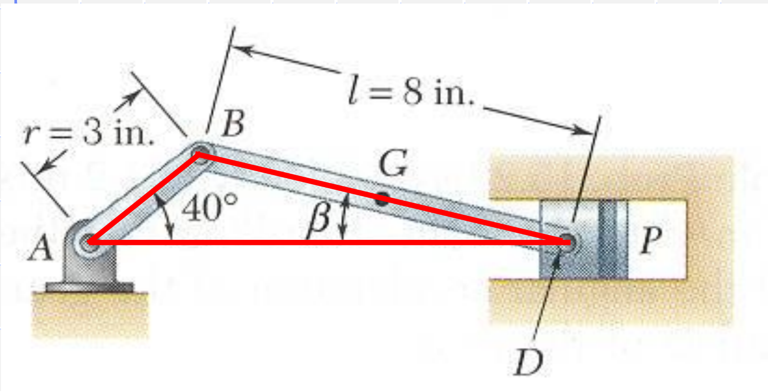
$$\omega_{BD} = 62.0\ {rad}/{s} \quad , \quad \beta = 13.95^\circ$$

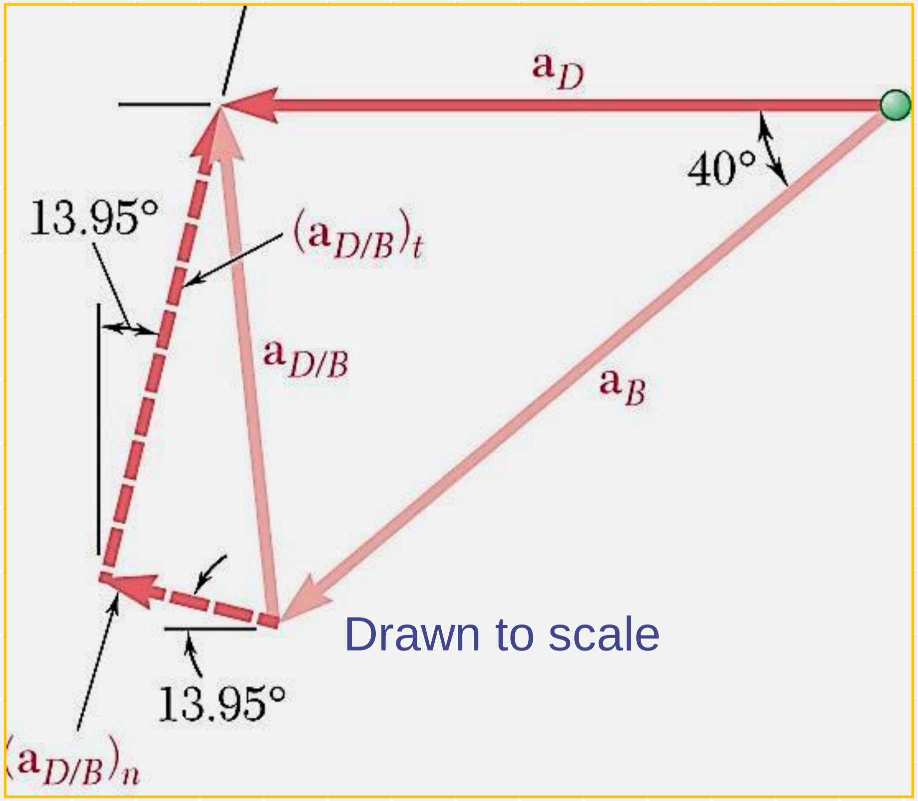
از مثال های قبل

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B} = \vec{a}_B + \left(\vec{a}_{D/B}\right)_t + \left(\vec{a}_{D/B}\right)_n$$

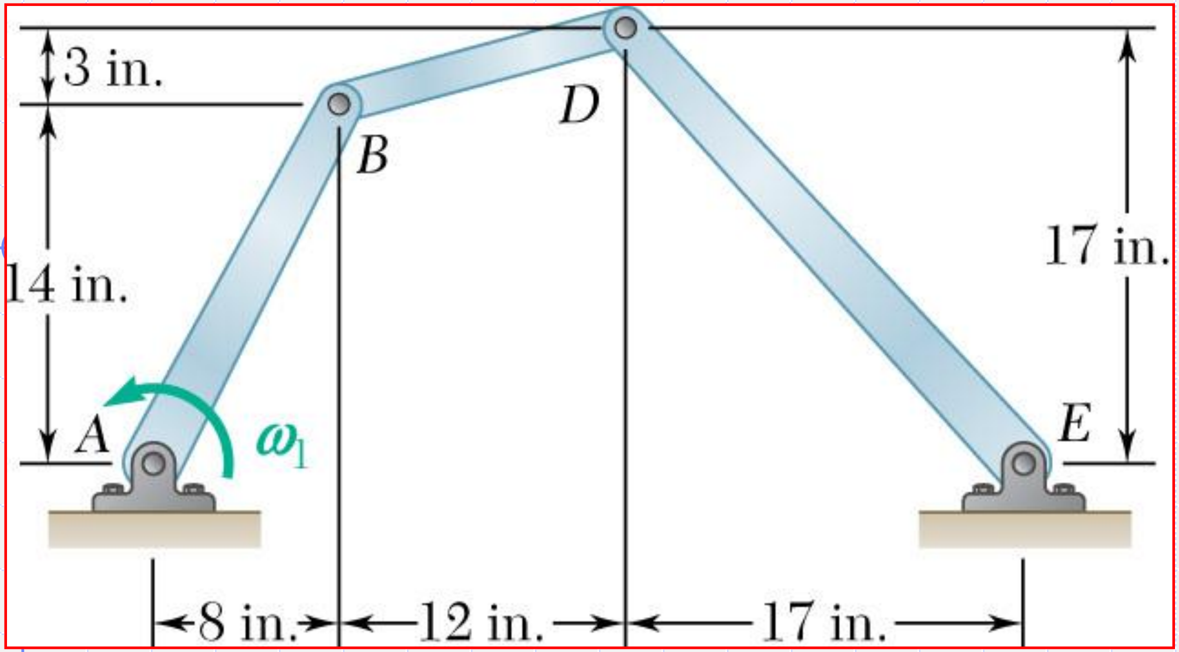
$$\left(a_{D/B}\right)_n = (BD)\,\omega_{BD}^2 = \left(\frac{8}{12}\text{ ft}\right)\left(62.0\,{}^{rad}\!/\!_{s}\right)^2 = 2563\,{}^{rad}\!/\!_{s^2}$$

$$\left(a_{D/B}\right)_t = (BD)\,\alpha_{BD} = \left(\frac{8}{12}\text{ ft}\right)\alpha_{BD} = 0.667\,\alpha_{BD}$$

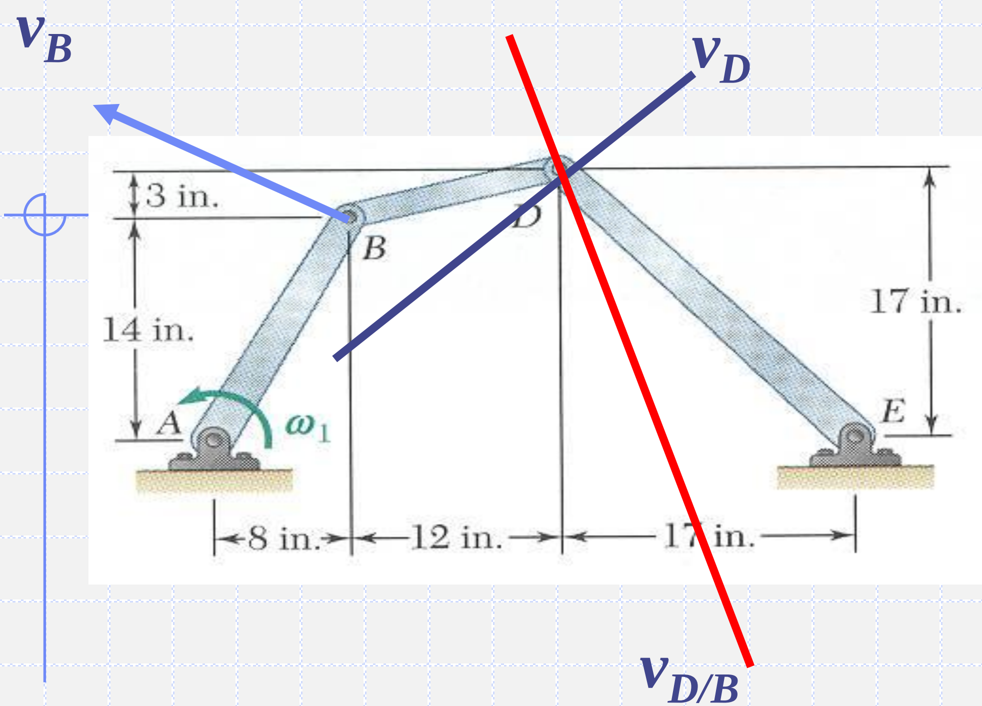




مثال :

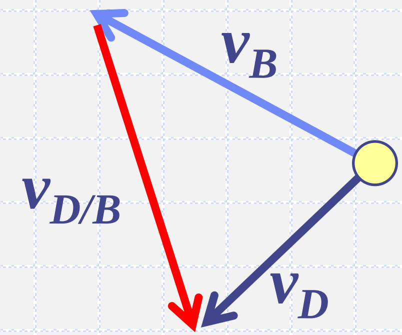


میله AB دارای سرعت زاویه ای ثابت پاد ساعتگرد 20 رادیان در ثانیه است. مطلوبست: سرعت و شتاب زاویه ای میله های BD و DE در موقعیت نشان داده شده.



$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B}$$

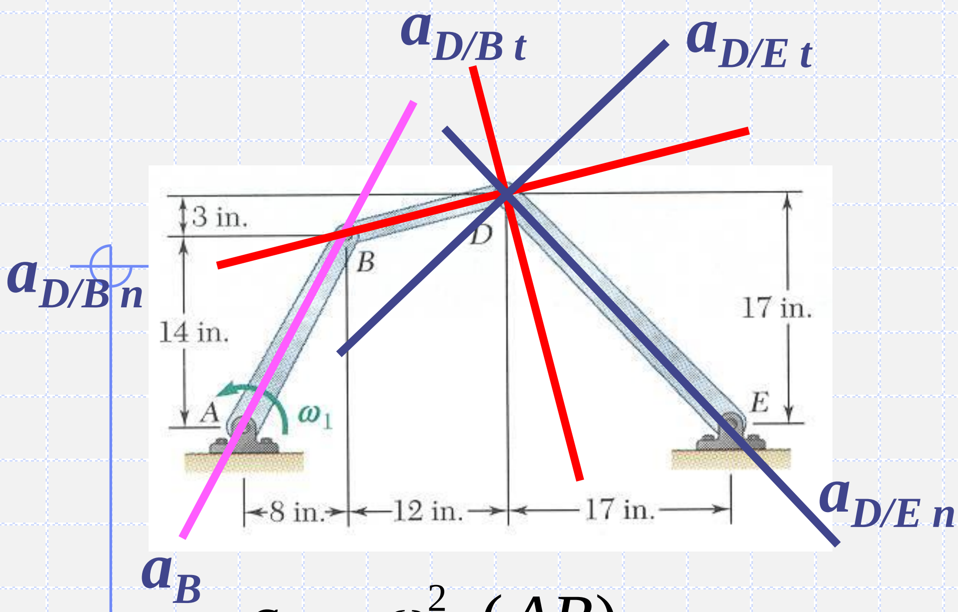
$$v_B = \omega_1 (AB)$$



$$v_{D/B} = \omega_{BD} (BD)$$

$$v_D = \omega_{DE} (DE)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{BD} &= -(29.33 \text{ rad/s}) \\ \omega_{DE} &= (11.29 \text{ rad/s}) \end{aligned}}$$



$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{D/E} = 0 + \vec{a}_{D/E}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$$

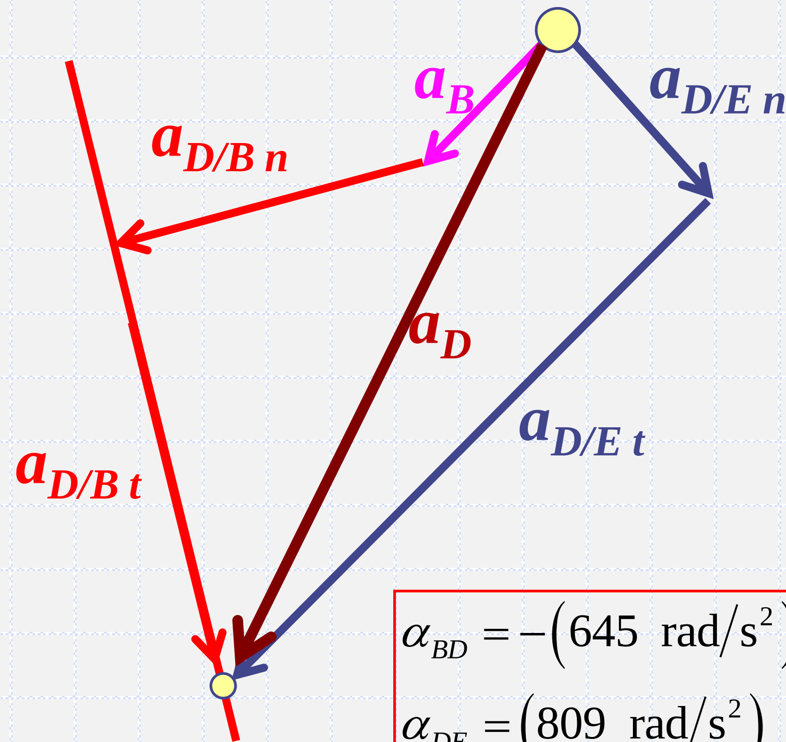
$$a_B = \omega_{AB}^2 (AB)$$

$$\left(a_{D/B}\right)_n = \omega_{BD}^2 (BD)$$

$$\left(a_{D/B}\right)_t = \alpha_{BD} (BD)$$

$$\left(a_{D/E}\right)_n = \omega_{DE}^2 (DE)$$

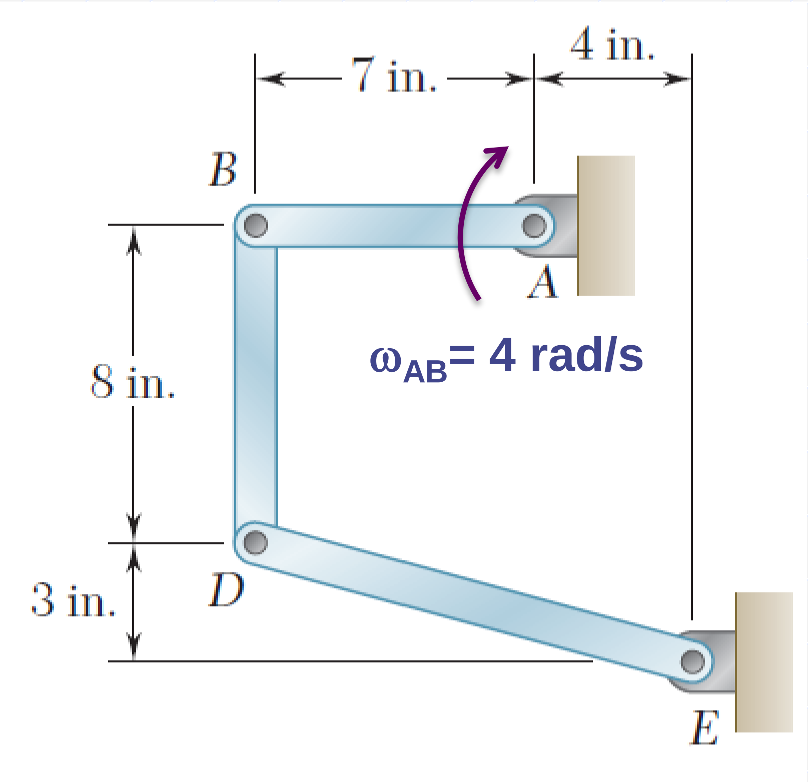
$$\left(a_{D/E}\right)_t = \alpha_{DE} (DE)$$



$$\alpha_{BD} = -\left(645 \ \text{rad/s}^2\right)$$

$$\alpha_{DE} = \left(809 \ \text{rad/s}^2\right)$$

مثال: میله AB دارای سرعت زاویه ای ثابت ساعتگرد ۴ رادیان در ثانیه است.
مطلوبست: شتاب زاویه ای میله های BD و DE در موقعیت نشان داده شده.



$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = 2.55 \text{ rad/s}$$

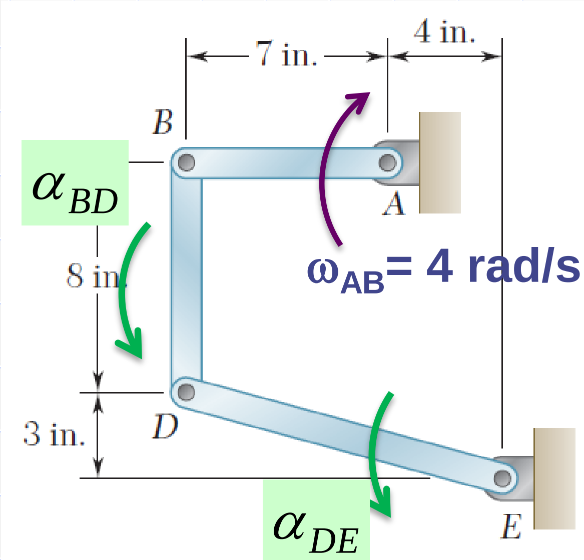
$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = 0.955 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 0$$

Bar AB:

$$\mathbf{a}_B = \underbrace{\cancel{\mathbf{a}_A}}_{0} + \underbrace{\cancel{\boldsymbol{\alpha}_{AB}}}_{0} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = -\omega_{AB}^2 \, \mathbf{r}_{B/A} = -(4)^2(-7\,\mathbf{i}) = 112\,\mathbf{i}$$



Bar BD:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BD} \times \mathbf{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\,\mathbf{r}_{D/B}$$
$$= 112\,\mathbf{i} + \alpha_{BD}\mathbf{k} \times (-8\mathbf{j}) - (0.95)^2(-8\mathbf{j})$$
$$\mathbf{a}_D = (112 + 8\,\alpha_{BD})\,\mathbf{i} + 7.29\,\mathbf{j}$$

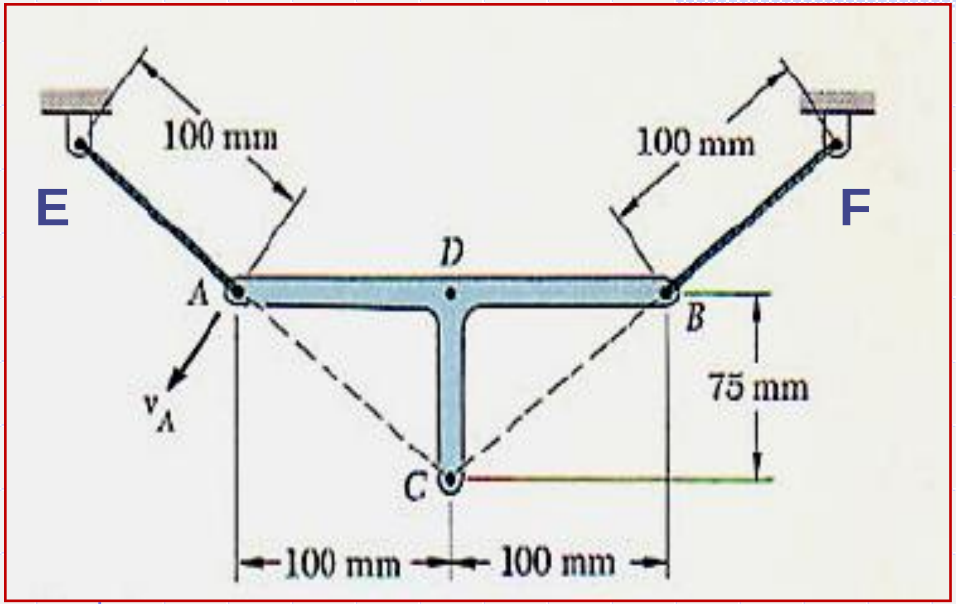
Bar DE:

$$\mathbf{a}_D = \boldsymbol{\alpha}_{DE} \times \mathbf{r}_{D/E} - \omega_{DE}^2 r_{D/E}$$
$$= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times (-11\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (2.55)^2(-11\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$
$$= -11\alpha_{DE}\,\mathbf{j} - 3\alpha_{DE}\,\mathbf{i} + 71.28\mathbf{i} - 19.44\mathbf{j} = (-3\alpha_{DE} + 71.28)\,\mathbf{i} - (11\alpha_{DE} + 19.44)\,\mathbf{j}$$

j: $\quad 7.29 = -(11\alpha_{DE} + 19.44)$

i: $\quad 112 + 8\alpha_{BD} = [-(3)(-2.43) + 71.28]$

$$\alpha_{DE} = -2.43 \text{ rad/s}^2$$
$$\alpha_{BD} = -4.18 \text{ rad/s}^2$$



مثال : میله های AE و BF به تکیه گاه های E وF متصل شده اند.
سرعت نقطه A مشخص و ثابت است.
مطلوبست : شتاب نقطه C

$$V_A = 250 \quad (mm/s)$$

$$\frac{dV_A}{dt} = 0$$

$$a_C = ?$$

حل :

$$V_A = (AC)\,\omega$$

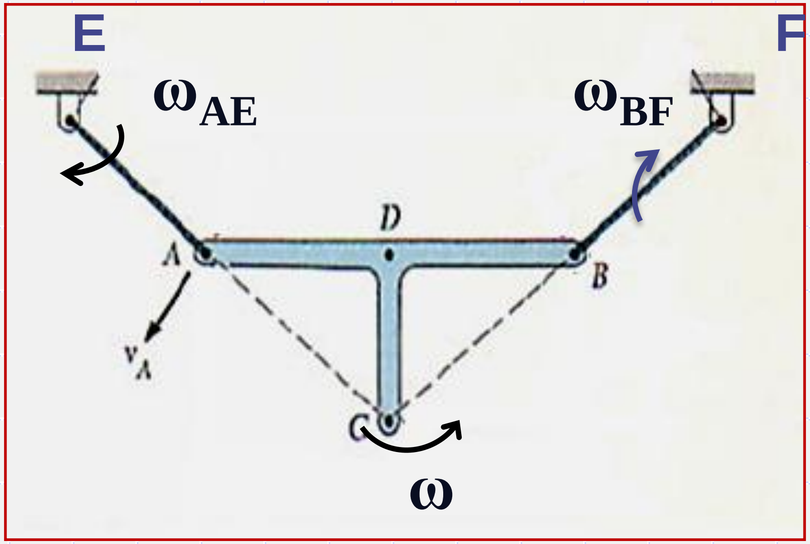
$$\omega = \frac{0.25}{0.125} = 2 \quad rad/s$$

$$V_A = (AE)\,\omega_{AE}$$

$$\omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5 \quad rad/s$$

$$a_A = (a_A)_n = r\,\omega_{AE}^2$$

$$= 0.1(2.5)^2 = 0.625 \quad (m/s^2)$$



$$(\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$$

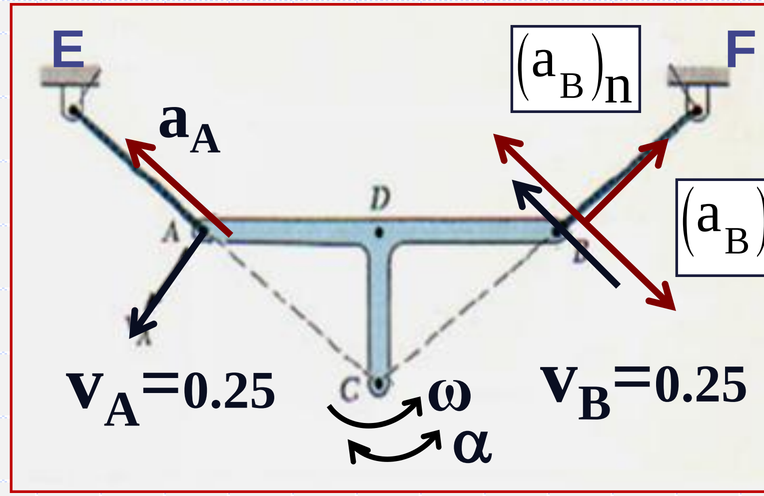
$$(a_B)_n = 0.1\omega_{BF}^2 = 0.625 \quad m/s^2$$

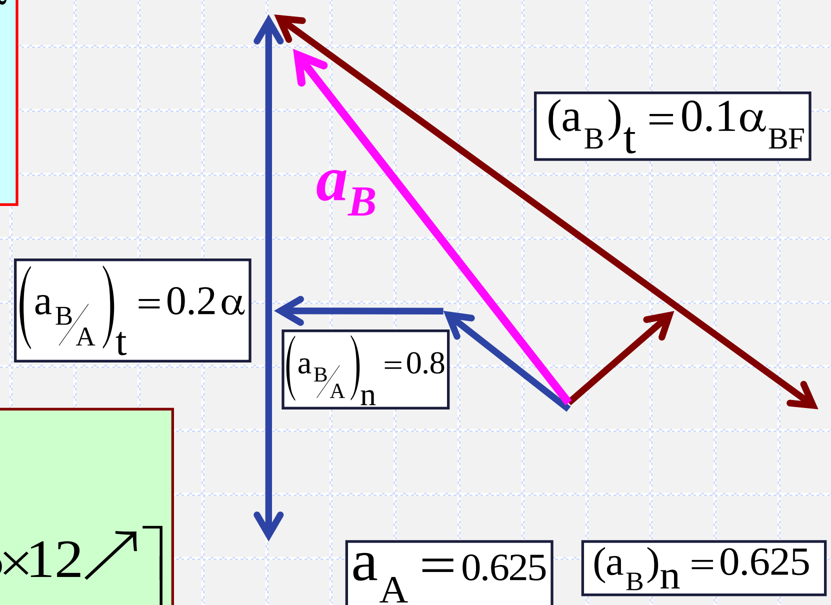
$$(a_B)_t = 0.1\alpha_{BF}$$

$$[0.625\nearrow] + [0.1\alpha_{BF}\searrow] =$$
$$[0.625\nwarrow] + [0.8\leftarrow] + [0.2\alpha\updownarrow]$$

$$(a_{B/A})_n = 0.2\omega^2 = 0.8 \quad , \quad (a_{B/A})_t = 0.2\alpha$$

$$\alpha = 12 \quad (rad/s)$$





$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + (\vec{a}_{C/A})_n + (\vec{a}_{C/A})_t$$
$$= [0.625\nwarrow] + [0.125\times 2^2\nwarrow] + [0.125\times 12\nearrow]$$
$$= [1.875\uparrow] \quad (m/s^2)$$

حرکت صفحه ای به روش پارامتری

$$x_A = l\sin\theta \quad , \; y_B = l\cos\theta$$

$$v_A = \frac{d\,x_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\sin\theta) = l\dot{\theta}\cos\theta = l\omega\cos\theta$$

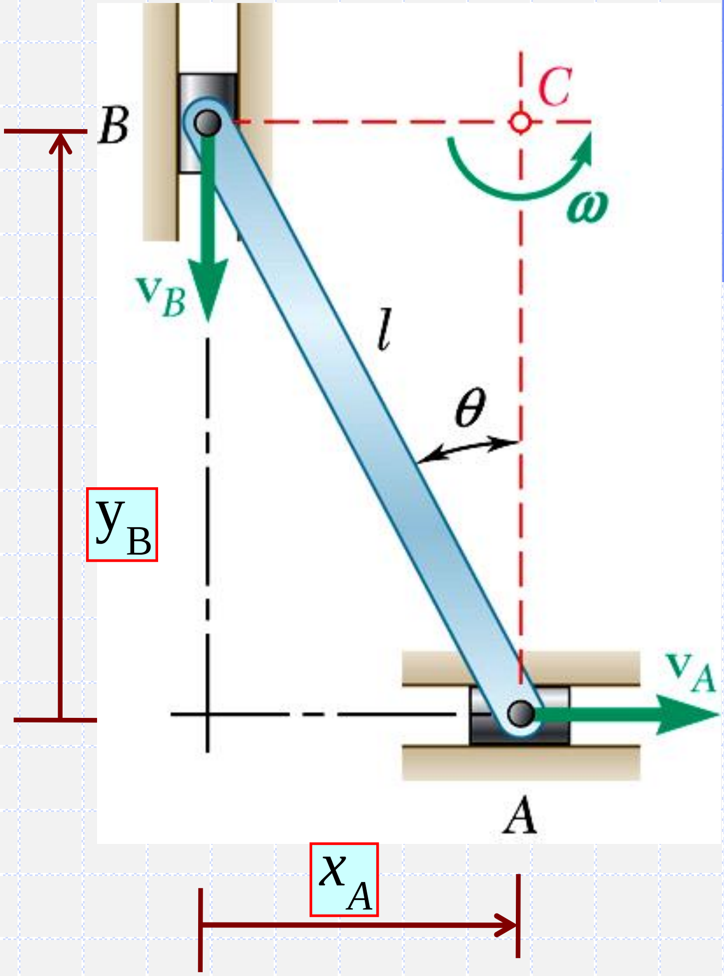
$$v_B = \frac{d\,y_B}{dt} = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta = -l\omega\sin\theta$$

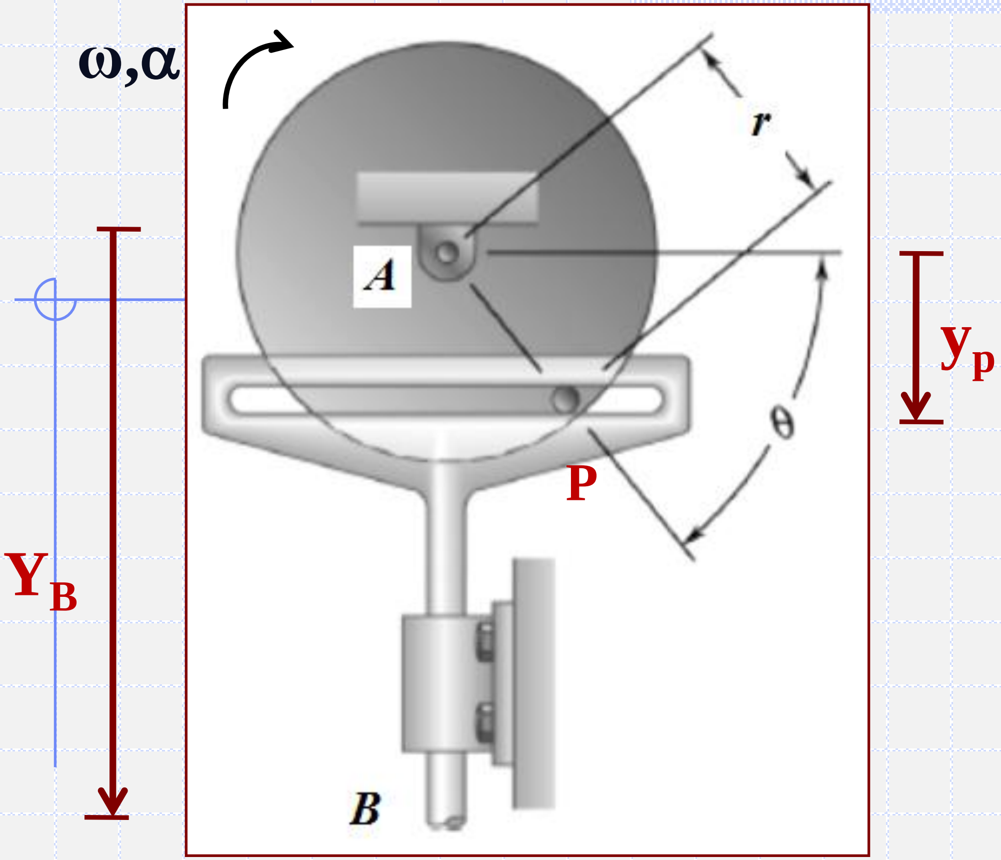
$$a_A = \frac{d\,v_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\omega\cos\theta)$$

$$= l\dot{\omega}\cos\theta - l\omega^2\sin\theta = l\alpha\cos\theta - l\omega^2\sin\theta$$

$$a_B = \frac{d\,v_B}{dt} = \frac{d}{dt}(-l\omega\sin\theta)$$

$$= -l\dot{\omega}\sin\theta - l\omega^2\cos\theta = -l\alpha\sin\theta - l\omega^2\cos\theta$$





مثال : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ω و شتاب زاویه α در حال حرکت است متصل شده است . فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد.

مطلوبست : $V_B=?$, $a_B=?$

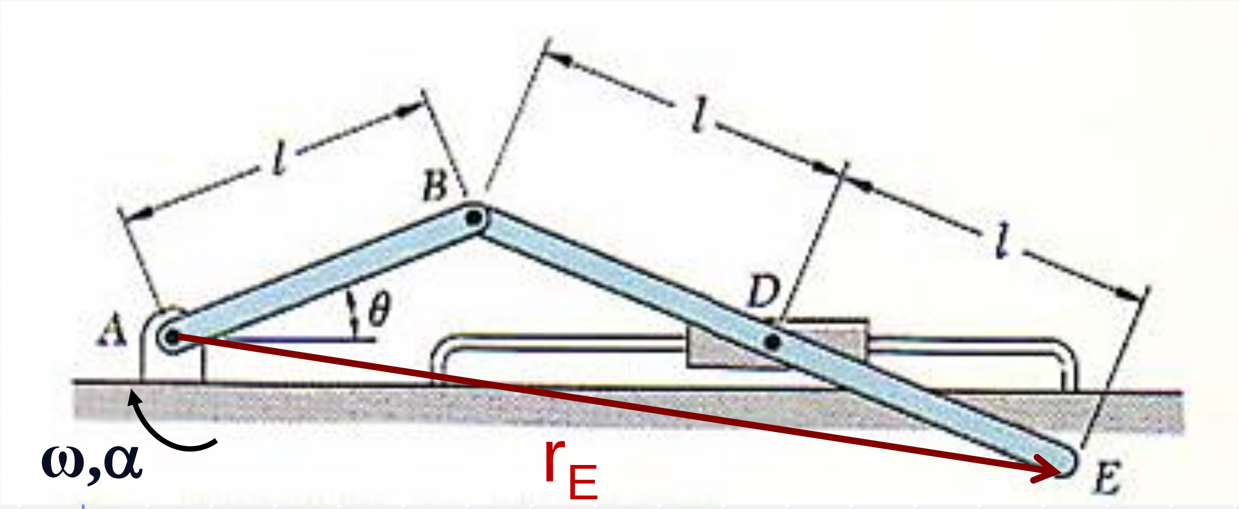
حل :

$$Y_B = y_p + C \qquad y_p = r\sin\theta$$

$$Y_B = r\sin\theta + C \qquad v_B = \frac{d(Y_B)}{dt} = r\omega\cos\theta$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = r\alpha\cos\theta - r\omega^2\sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ω و شتاب زاویه α در حال دوران است.



مطلوبست :

$\vec{v}_E = ?\quad , \quad \vec{a}_E = ?$

$$\vec{r}_E = 3\,L\cos\theta\;\vec{i} - L\,\sin\theta\;\vec{j}$$

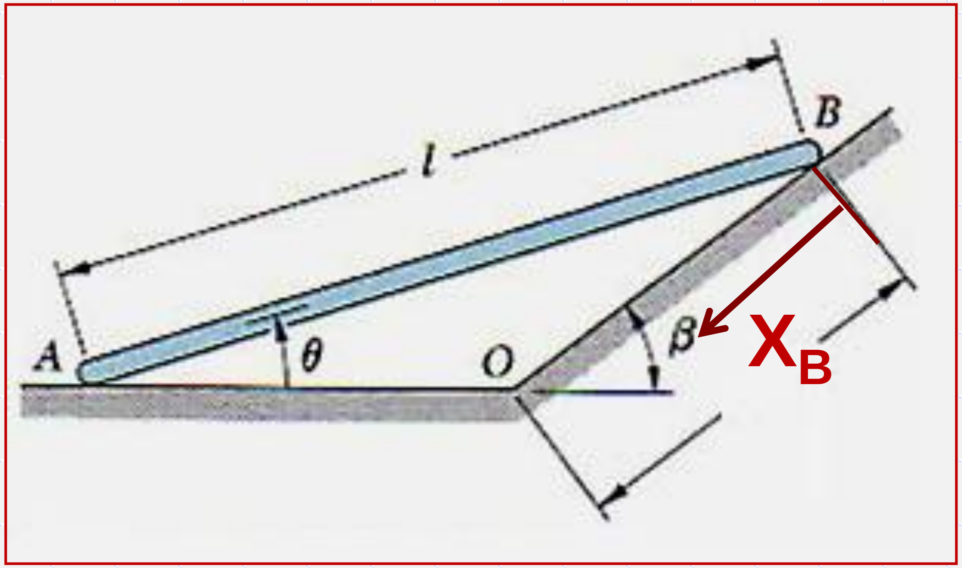
$$\vec{v}_E = \frac{d}{dt}(\vec{r}_E) = \vec{v}_E = +\left(-3L\,\omega\sin\theta\right)\,\vec{i} + \left(-L\omega\cos\theta\right)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_E = \frac{d}{dt}(\vec{v}_E)$$

$$= -3L(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)\vec{i} - L(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)\vec{j}$$

$$= -3L(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)\vec{i} - L(\alpha\cos\theta - \omega^2\sin\theta)\vec{j}$$

مثال : میله AB در حال حر کت است. اگر سرعت نقطه B به مقدار ثابت V باشد، مطلوبست : سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای میله AB .



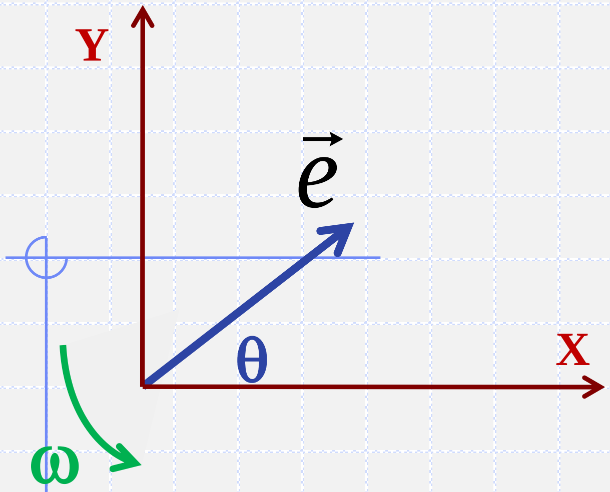
$$\frac{X_B}{\sin\theta} = \frac{L}{\sin\beta}$$

$$V_B = \frac{d(X_B)}{dt} = \frac{L\omega \operatorname{Cos}\theta}{\sin\beta} = V \swarrow \quad \Rightarrow \quad a_B = 0$$

$$\omega = \frac{V\sin\beta}{L\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dot{\omega} = \frac{V\sin\beta}{L} \times \frac{\omega\ \sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{V^2\sin^2\beta}{L^2\cos^3\theta}\sin\theta$$

مشتق بردار متحرک

بردار واحد $\vec{e}$ با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد .



$$\vec{e}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

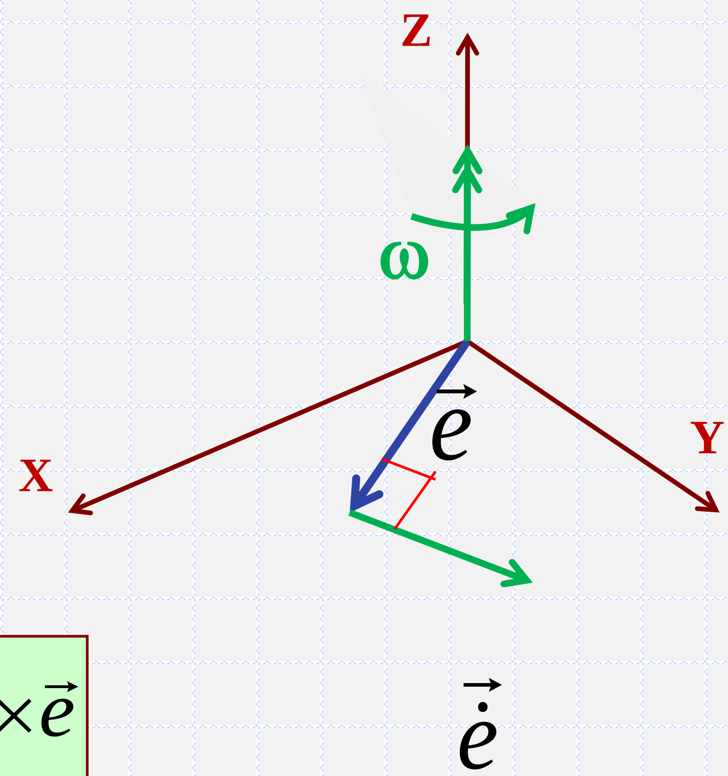
$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$$

$$=-(\dot{\theta})\sin\theta\,\vec{i}+(\dot{\theta})\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{de}{dt}=\vec{\dot{e}}=-\omega\sin\theta\,\vec{i}+\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$|\dot{e}|=\omega$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}$$



بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک Omega Theorem

$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}=R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)$$

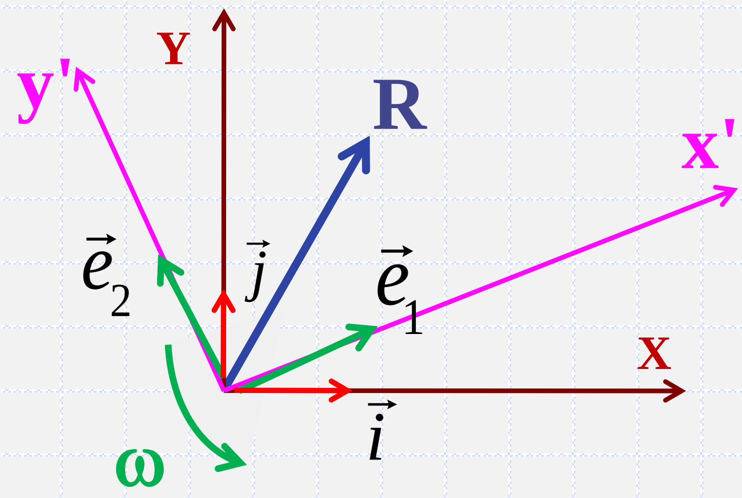
$$\dot{\vec{R}}=\dot{R}_1\vec{e}_1+R_1\dot{\vec{e}}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

$$\dot{\vec{R}}=(\dot{R}_1\vec{e}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2)+R_1\dot{\vec{e}}_1+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

$$\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+R_1(\vec{\omega}\times\vec{e}_1)+R_2(\vec{\omega}\times\vec{e}_2)$$

$$\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{\omega}\times(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)$$

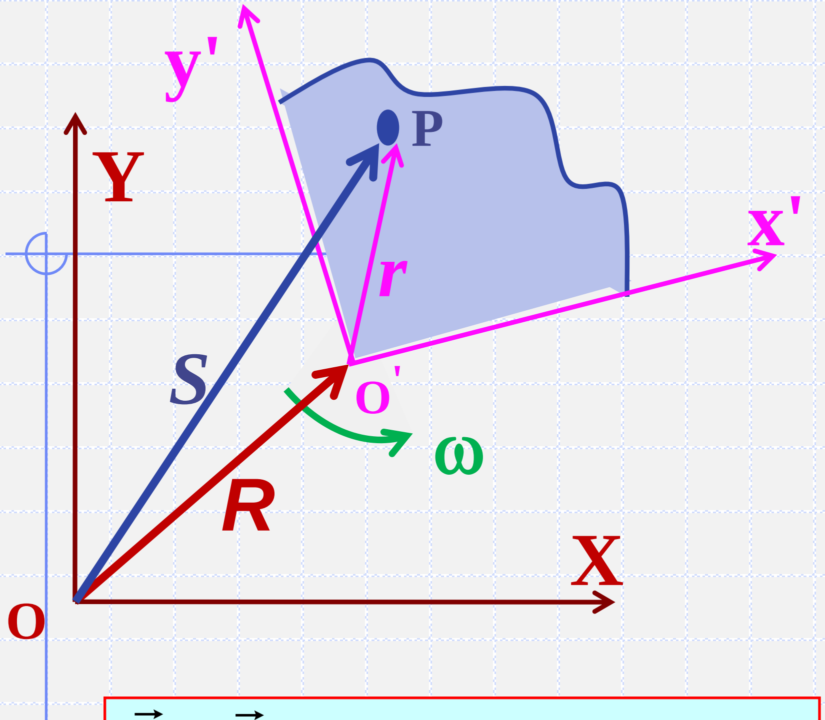
$$\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{\omega}\times\vec{R}$$



در این روابط OXY دستگاه ثابت و ox´y´ دستگاه متحرک و $\vec{i},\vec{j}$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ در دستگاه متحرک است.

$$\dot{\vec{R}}_{OXYZ}=\dot{\vec{R}}'_{ox'y'z'}+\vec{\omega}\times\vec{R}$$

تئوری امگا



سرعت نقطه مادی

دستگاه ثابت : OXY

دستگاه متحرک: $o'x'y'$

درحال حرکت و دوران است

$\vec{S}$: بردار موقعیت نقطه P

$\vec{R}$: بردار موقعیت نقطه o' (مطلق)

$\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)

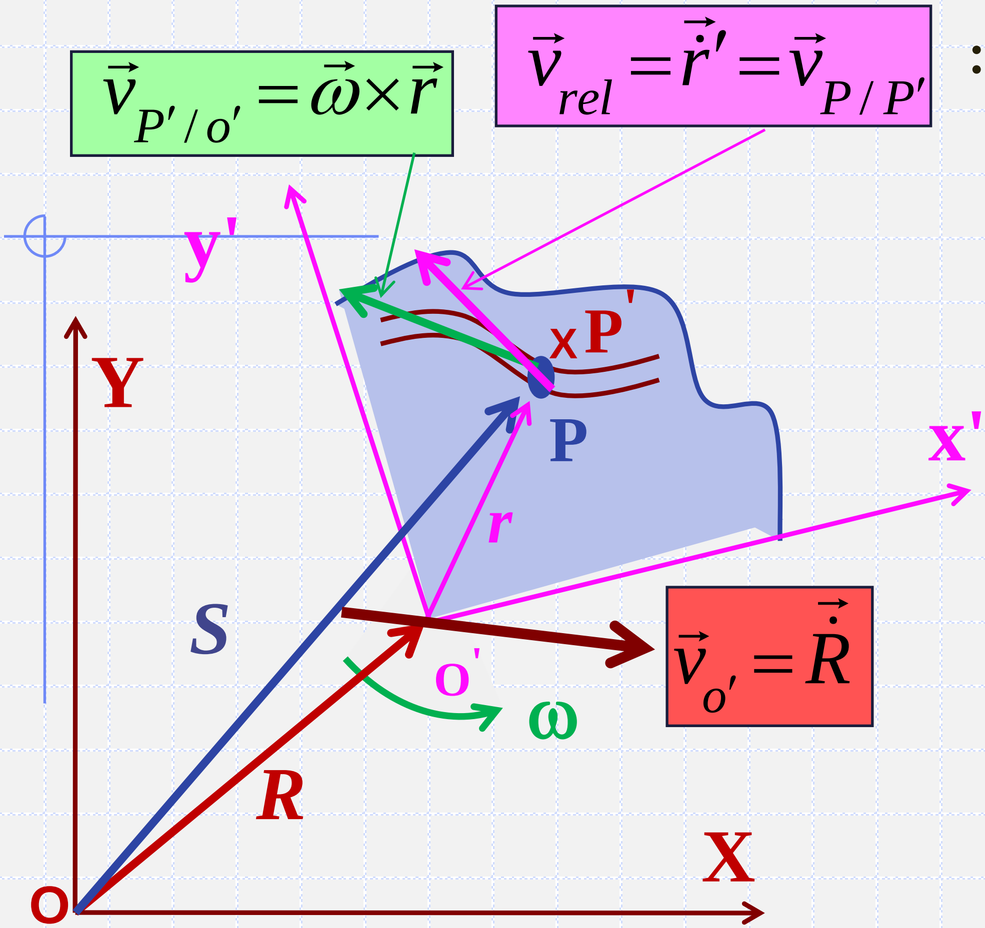
$$\vec{S}=\vec{R}+\vec{r}$$

$$\vec{v}_P=\frac{d}{dt}(\vec{S})=\dot{\vec{S}}=\frac{d}{dt}(\vec{R}+\vec{r})$$

$$=\frac{d}{dt}(\vec{R})+\frac{d}{dt}(\vec{r})=\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}_P=\dot{\vec{R}}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\dot{\vec{r}}'$$

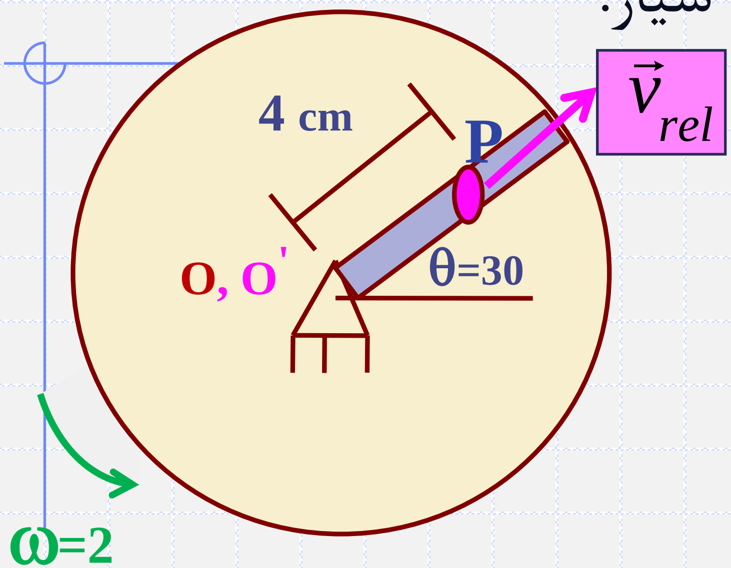
سرعت نسبی در دستگاه متحرک:



$$\vec{v}_P = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}'$$
$$= \vec{v}_{o'} + \vec{v}_{P'/o'} + \vec{v}_{P/P'}$$

$$\vec{v}_{P/o'} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}'$$
$$= \vec{v}_{P'/o'} + \vec{v}_{P/P'}$$

مثال : دیسک شیارداری با سرعت زاویه ای $2\ rad/s$ در حال دوران است و ساچمه ای در داخل شیار با سرعت نسبی 3 سانتیمتر در ثانیه در حال حرکت است. مطلوبست: سرعت ساچمه P در شیار.



حل :

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{r}}'$$

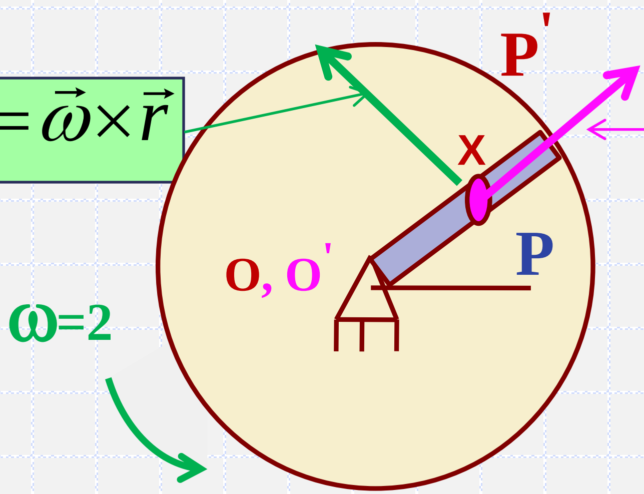
$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = 2\times 4 = 8 \quad \nwarrow$$

$$v_{rel} = \dot{r}' = 3 \quad \nearrow$$

$$\vec{v}_P = [8 \ \overset{30^\circ}{\searrow}\ ] + [\ 3 \ \underset{30^\circ}{\nearrow}\ ] \quad cm/s$$

راه حل دوم:

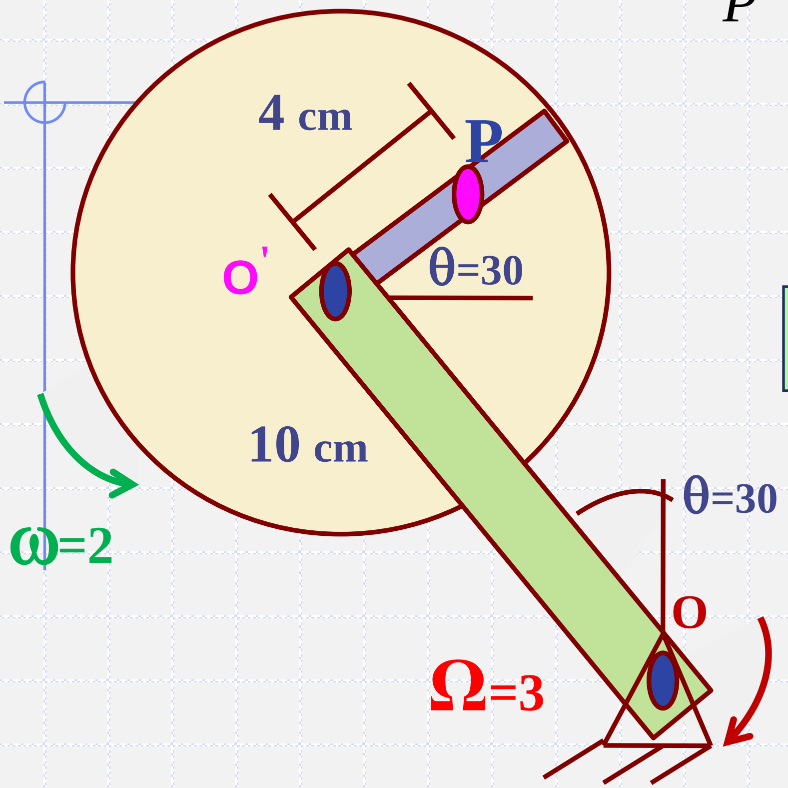
$$\vec{v}_{P'/o'} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$



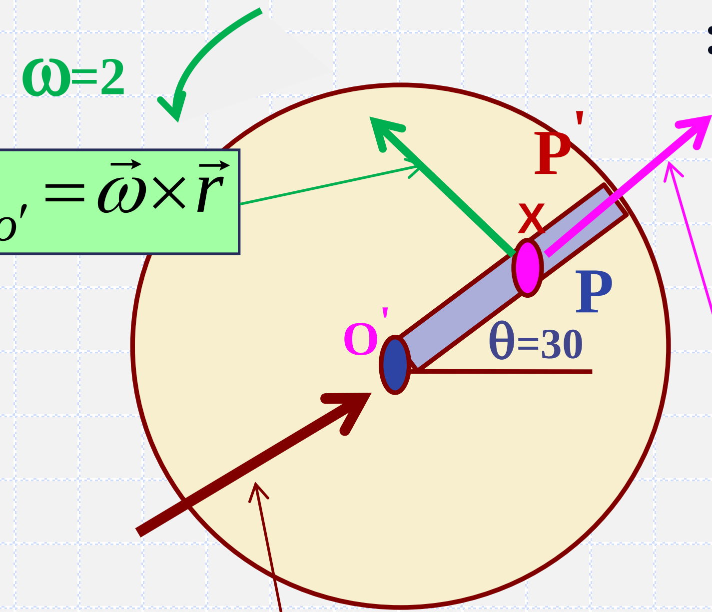
$$\vec{v}_{rel} = \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_{P/P'}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/P'} = [3\nearrow] + [8\nwarrow]$$

مثال : اگر کل سیستم مثال قبل حول نقطه تکیه گاه O، با سرعت زاویه ای $\Omega=3\ {rad}/{s}$ دوران کند، مطلوب است : $\vec{V}_P=?$



حل :



$$\vec{v}_{P'/o'}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

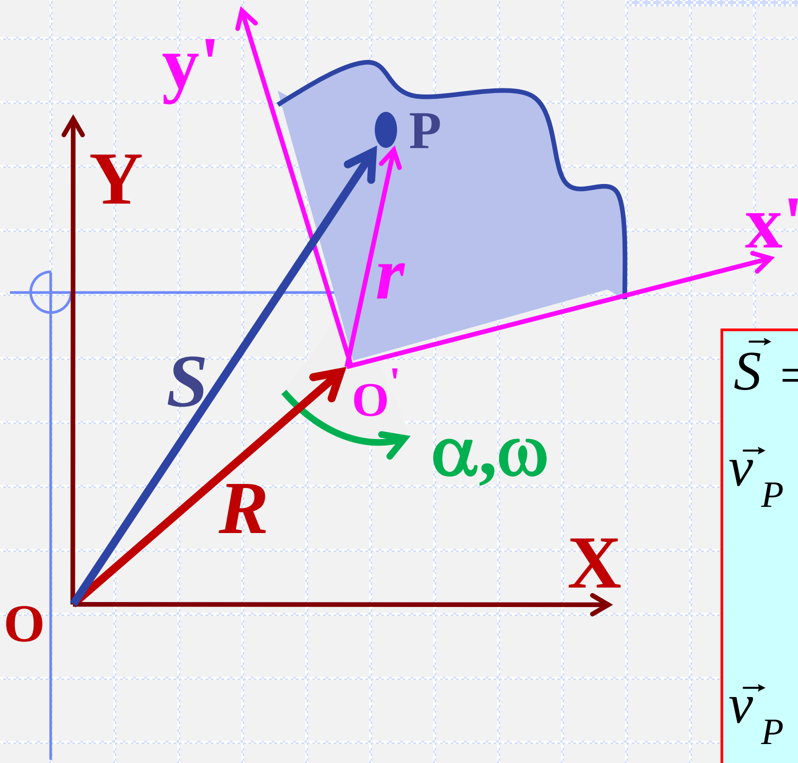
$$\vec{v}_{rel}=\vec{\dot{r}}'=\vec{v}_{P/P'}$$

$$\vec{v}_P=\vec{v}_{O'}+\vec{v}_{P'/O'}+\vec{v}_{P/P'}=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_P=[30\nearrow]+[8\nwarrow]+[3\nearrow]=[33\nearrow]+[8\nwarrow]\quad {cm}/{s}$$

$$\vec{v}_{o'}=\vec{\dot{R}}=\vec{\Omega}\times\vec{r}_{o'/o}$$

شتاب یک نقطه مادی



$$\vec{S} = \vec{R} + \vec{r}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(\vec{S}) = \dot{\vec{S}} = \frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{r})$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{R}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{r}}'$$

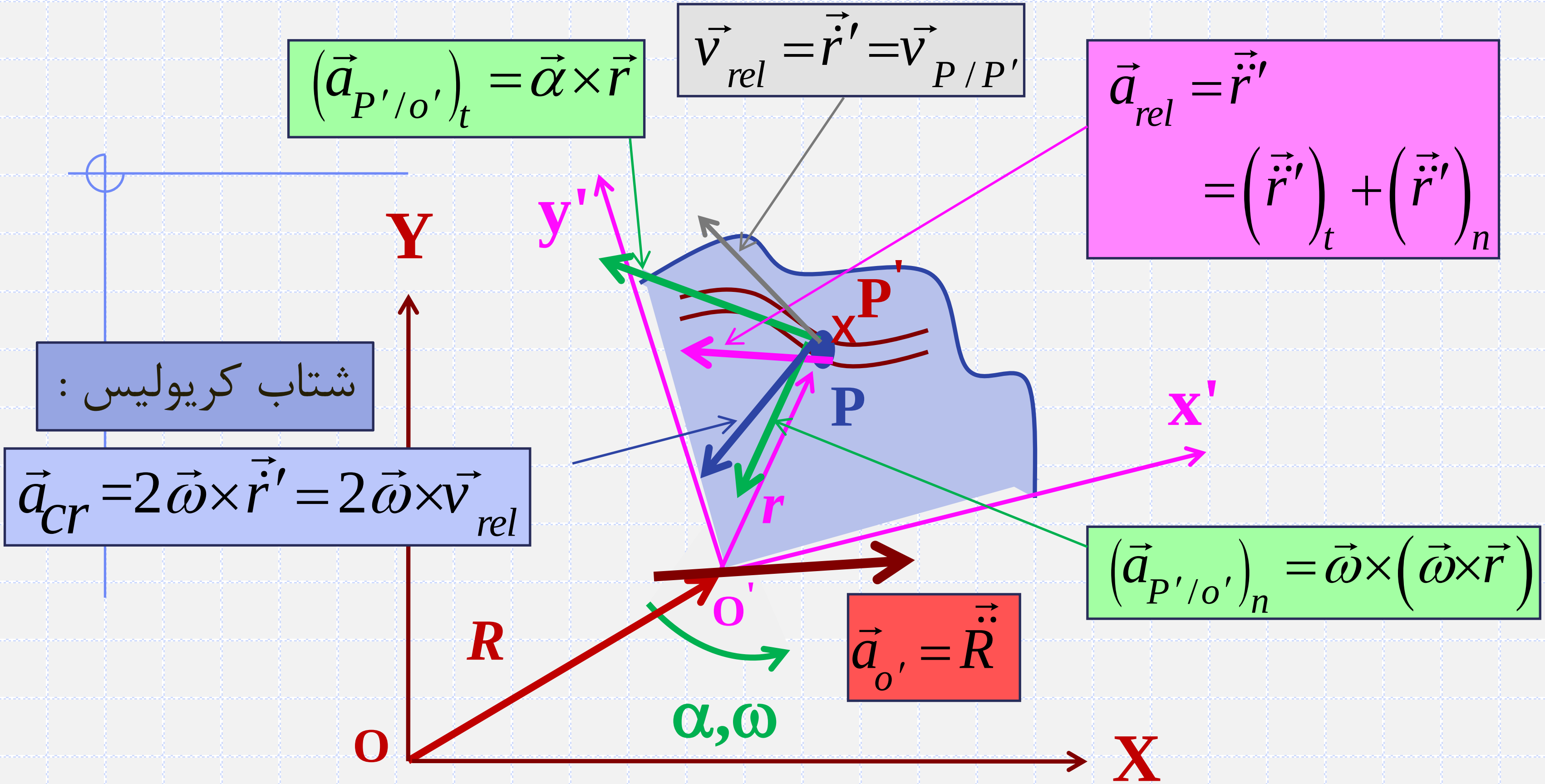
$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{S}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{r}}') = \ddot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}')$$

$$= \ddot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega})\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \left(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}'\right)$$

$$= \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{r}}'\right) + (\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}')$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}'}$$

شتاب نسبی در دستگاه متحرک:

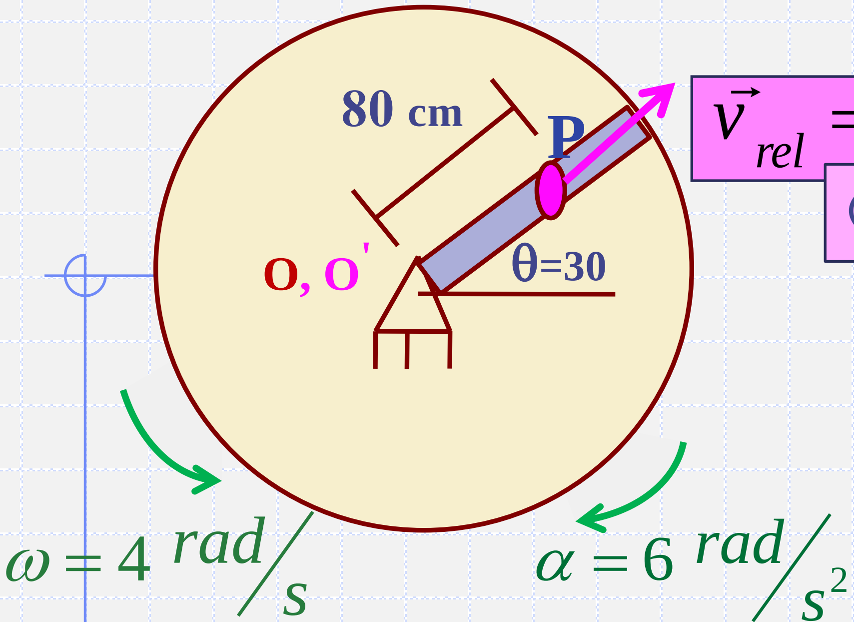


$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}' = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{P'/O'} + \vec{a}_{P/P'}$$

$$\vec{a}_{P'/O'} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \quad , \quad \vec{a}_{P/P'} = 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}' = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel}$$

مثال : با توجه به شکل مقابل،

مطلوب است : $\vec{a}_P = ?$



$$\vec{v}_{rel} = 8 \; m/s$$

(ثابت)

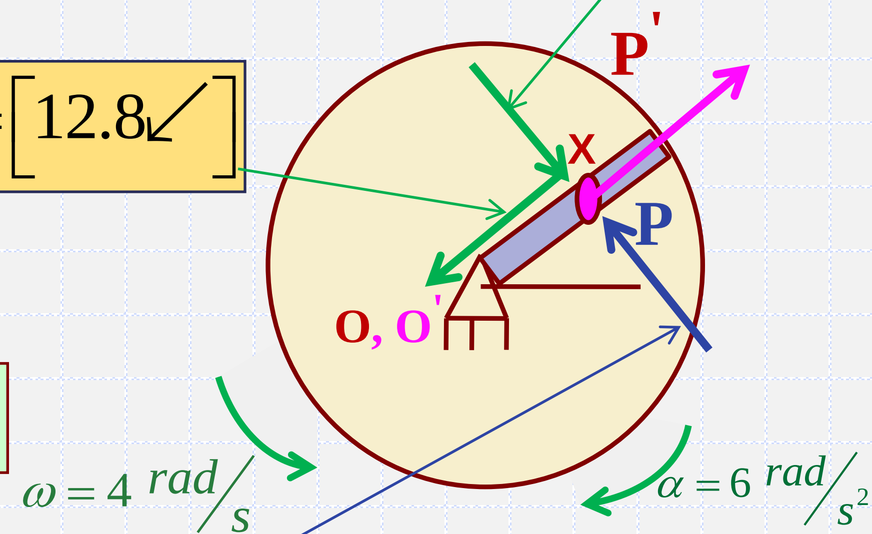
حل :

$$\left(\vec{a}_{P'/o'}\right)_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \left[6 \times 0.8 \searrow\right] = \left[4.8 \searrow\right]$$

$$\left(\vec{a}_{P'/o'}\right)_n = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \left[0.8 \times 4^2 \swarrow\right] = \left[12.8 \swarrow\right]$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/P'} \quad , \quad \vec{a}_{P/P'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_P = \left[12.8 \; \underset{30^\circ}{\swarrow}\right] + \left[59.2 \; \overset{30^\circ}{\nwarrow}\right] \; m/s^2$$



$$\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \left[2 \times 4 \times 8 \nwarrow\right] = \left[64 \nwarrow\right]$$

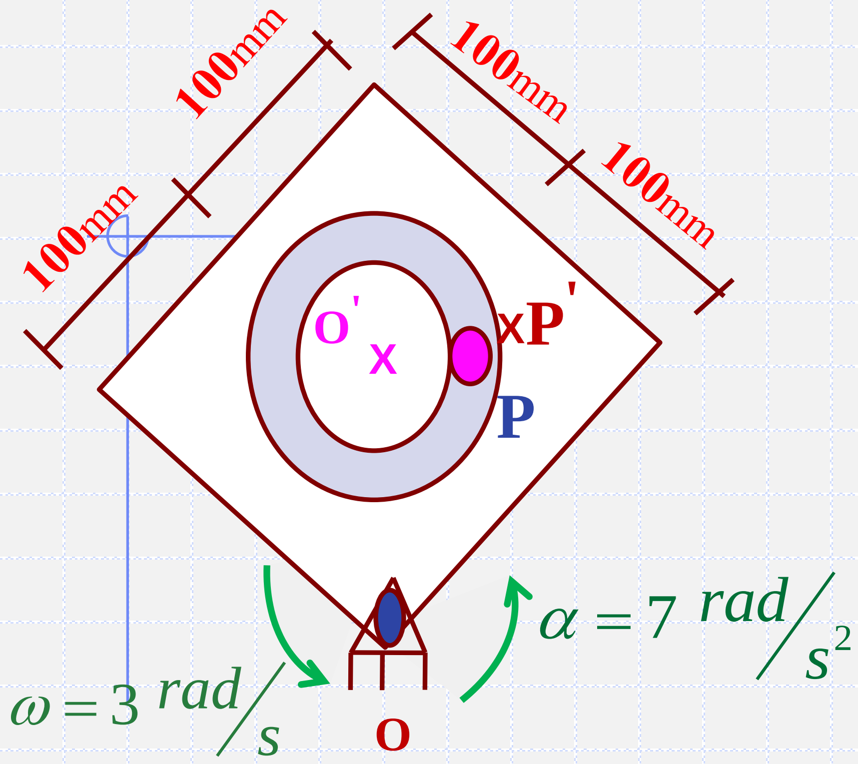
مثال : اگر جرم P در داخل شیار دایره ای شکل با

سرعت زاویه ای $\dot{\beta}=5\ rad/s$ نسبت به مرکز

صفحه و شتاب زاویه ای $\ddot{\beta}=12\ rad/s^2$ در حال

دوران باشد، مطلوبست: $\vec{v}_P=?\quad,\quad \vec{a}_P=?$

شعاع شیار = 80 میلیمتر



حل :

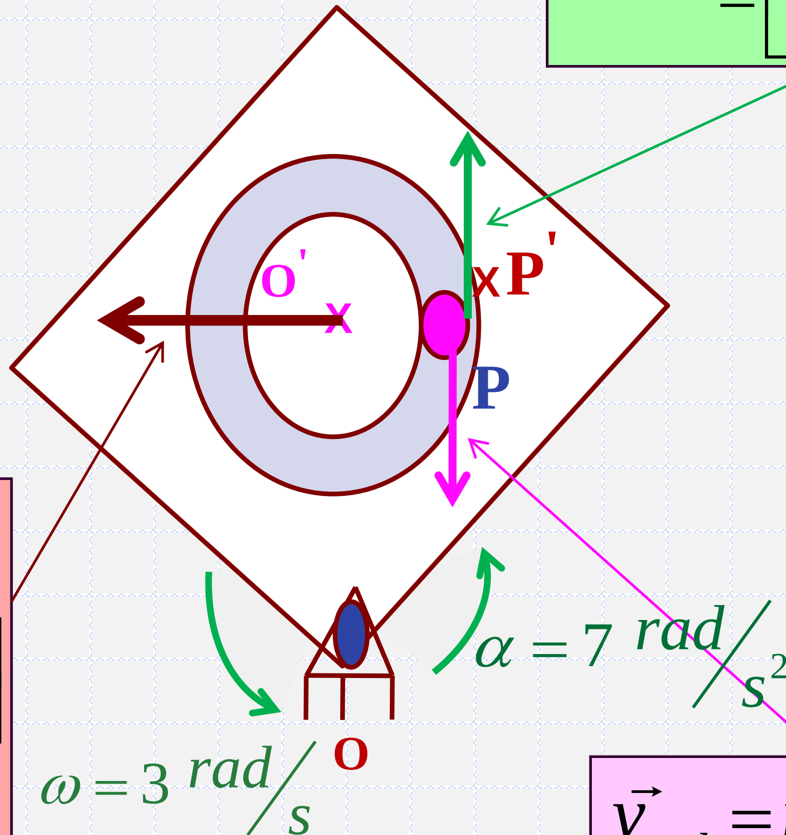
$$\vec{v}_P=\vec{v}_{P'}+\vec{v}_{P/P'}$$

$$\vec{v}_{P'}=\vec{v}_{o'}+\vec{v}_{P'/o'}=[0.1\sqrt{2}\,(3)\leftarrow]+[0.08(3)\uparrow]$$

$$\vec{v}_{P/P'}=[0.08\dot{\beta}\downarrow]=[0.40\downarrow]$$

$$\vec{v}_P=[0.3\sqrt{2}\leftarrow]+[0.24\uparrow]+[0.40\downarrow]=[0.42\leftarrow]+[0.16\downarrow]\quad m/s$$

$$\vec{v}_{P'/o'} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \left[(3)0.08\uparrow\right] = \left[0.24\uparrow\right]$$

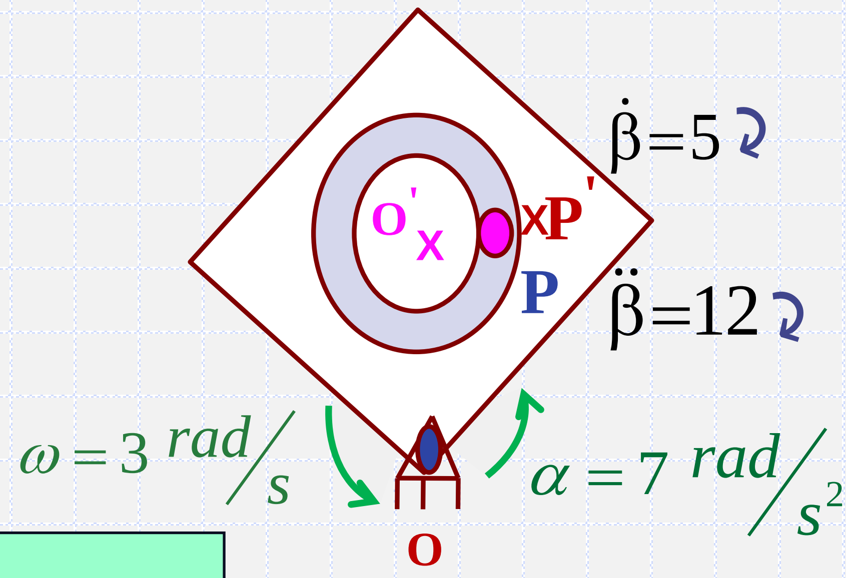


$$\vec{v}_{o'} = \dot{\vec{R}} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{o'/o} = \left[(3)0.1\sqrt{2}\leftarrow\right] = \left[0.42\leftarrow\right]$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_{P/P'} = [0.08\,\dot{\beta}\downarrow] = [0.4\downarrow]$$

$$\vec{a}_P=\vec{a}_{P'}+a_{P/P'}$$
$$\vec{a}_{P'}=\vec{a}_{o'}+\vec{a}_{P'/o'}$$

$$\vec{a}_{o'}=[0.1\sqrt{2}\alpha\leftarrow]+[0.1\sqrt{2}\omega^2\downarrow]$$
$$=[0.7\sqrt{2}\leftarrow]+[0.9\sqrt{2}\downarrow]$$
$$\vec{a}_{P'/o'}=[0.08\alpha\uparrow]+[0.08\omega^2\leftarrow]$$
$$=[0.56\uparrow]+[0.72\leftarrow]$$



$$\vec{a}_{P/P'}=\vec{a}_{cr}+\vec{a}_{rel}$$
$$\vec{a}_{cr}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}=\left[(2)(3)(0.4)\rightarrow\right]=[2.4\rightarrow]$$
$$\vec{a}_{rel}=(\vec{a}_{rel})_t+(\vec{a}_{rel})_n=[0.08(12)\downarrow]+[0.08(5)^2\leftarrow]$$
$$=\left[0.96\downarrow\right]+[2\leftarrow]$$

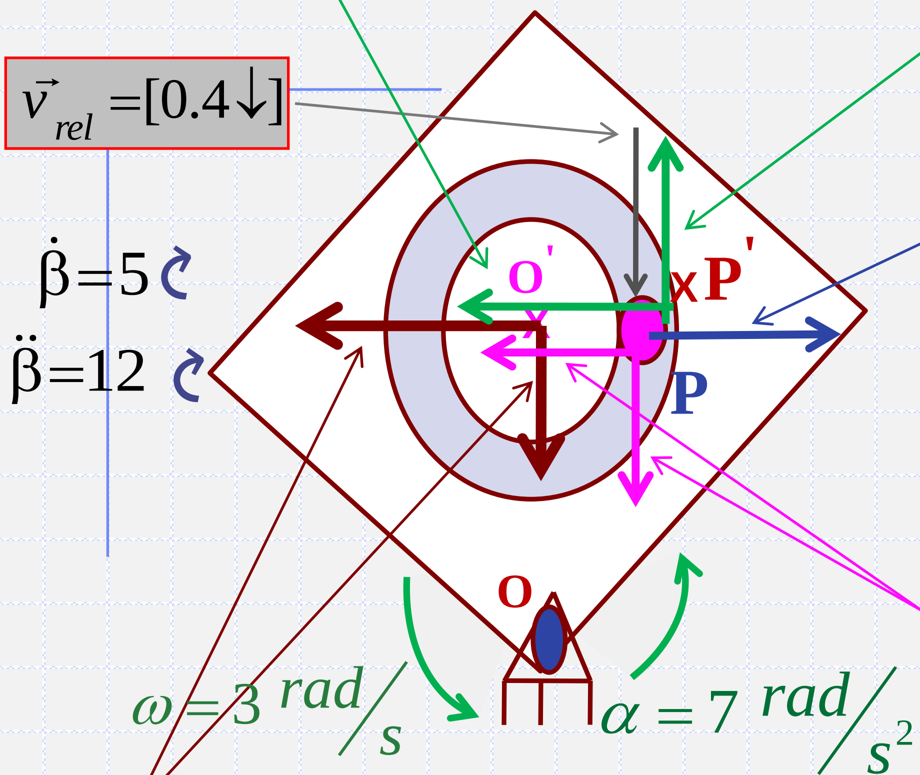
$$\vec{a}_P=[0.7\sqrt{2}\leftarrow]+[0.9\sqrt{2}\downarrow]+[0.56\uparrow]+[0.72\leftarrow]+[2.4\rightarrow]+[0.96\downarrow]+[2\leftarrow]$$

$$\vec{a}_P=[1.31\rightarrow]+[1.67\downarrow]$$
$$\vec{a}_P=\sqrt{(1.31)^2+(1.67)^2}=2.12\ {}^{m}/_{s^2}$$

$$\left(\vec{a}_{P'/o'}\right)_n = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \left[0.08(3)^2 \leftarrow\right] = \left[0.72\leftarrow\right]$$

$$\left(\vec{a}_{P'/o'}\right)_t = \vec{\alpha}\times\vec{r} = \left[(7)0.08\uparrow\right] = \left[0.56\uparrow\right]$$

$$\vec{v}_{rel} = [0.4\downarrow]$$



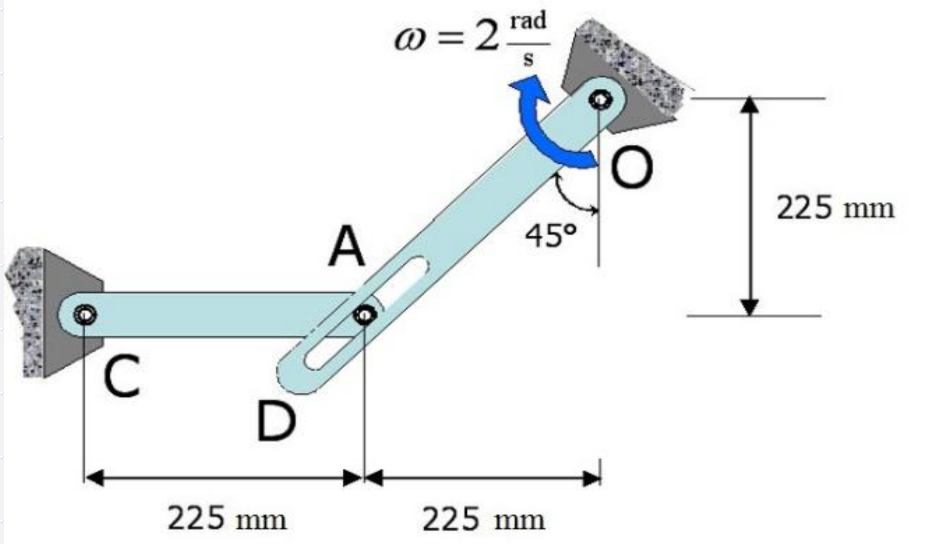
$$\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \left[2\times3\times0.4\rightarrow\right] = \left[2.4\rightarrow\right]$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{\vec{r}}' = \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_t + \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_n = \left[\ddot{\beta} r\downarrow\right] + \left[r\dot{\beta}^2\leftarrow\right] = \left[12\times0.08\downarrow\right] + \left[0.08(5)^2\leftarrow\right] = \left[0.96\downarrow\right] + \left[2\leftarrow\right]$$

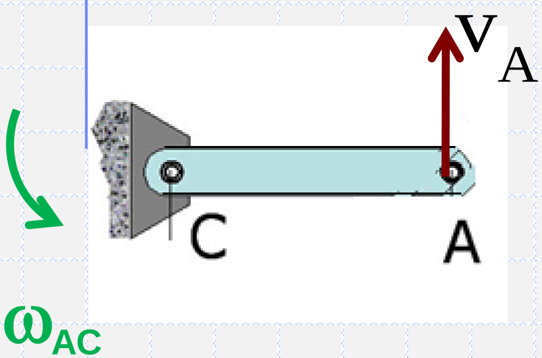
$$\vec{a}_{o'} = \left[(7)0.1\sqrt{2}\leftarrow\right] + \left[0.1\sqrt{2}(3)^2\downarrow\right] = \left[0.7\sqrt{2}\leftarrow\right] + \left[0.9\sqrt{2}\downarrow\right]$$

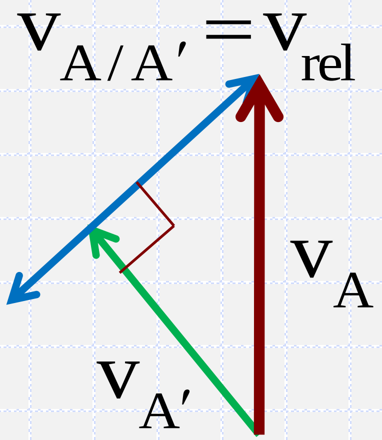
مثال : اگر میله OD با سرعت زاویه ثابت در حال دوران باشد، مطلوبست:

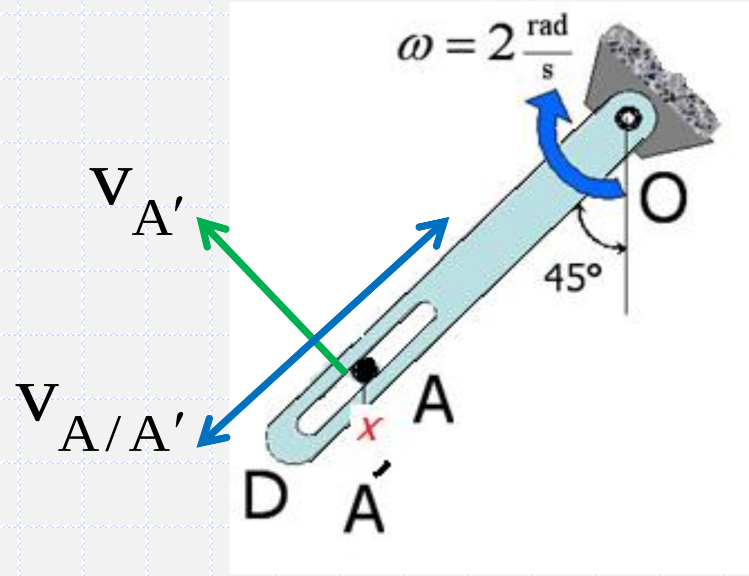
$$\omega_{AC}=? \;,\; \alpha_{AC}=?$$
$$V_{A/OD}=?\;,\; a_{A/OD}=?$$



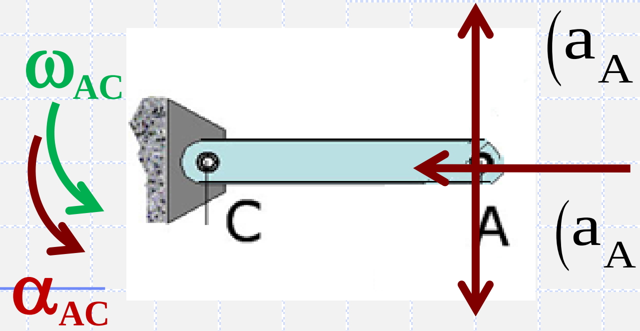
حل :







$$v_{A'}=0.225\sqrt{2}\,\omega=0.45\sqrt{2} \quad , \quad v_A \cos 45=v_{A'}$$
$$v_A=0.90\ \ m/s=(AC)\,\omega_{AC} \Rightarrow \omega_{AC}=\frac{v_A}{AC}=4\ \ rad/s$$



$$(a_A)_t = (AC)\,\alpha_{AC} = 0.225\,\alpha_{AC}$$

$$(a_A)_n = (AC)\omega_{AC}^2 = 0.225(4)^2 = 3.6$$

$$\begin{cases}(a_A)_t = (AC)\alpha_{AC} = 0.225\alpha_{AC} \updownarrow \\ (a_A)_n = (AC)\omega_{AC}{}^2 = 0.225(4)^2 = 3.6 \leftarrow\end{cases}$$

$$\vec{a}_A = [3.6 \leftarrow] + [0.225\ \alpha_{AC} \updownarrow]$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A'} + \vec{a}_{A/A'}$$

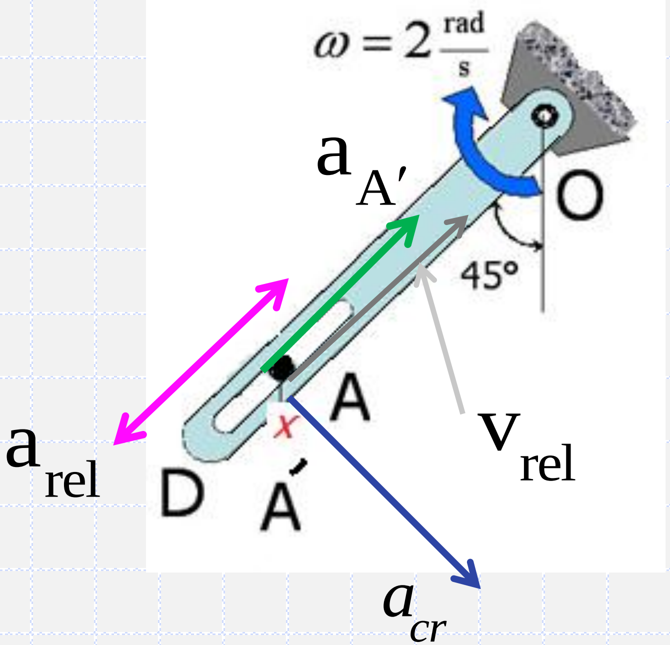
$$\vec{a}_{A'} = \left[(A'O)\omega^2 \nearrow\right] = 0.225\sqrt{2}(2)^2 = \left[0.9\sqrt{2} \nearrow\right]$$

$$\vec{a}_{A/A'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{cr} = \left[2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} \searrow\right] = 2(2)(0.45\sqrt{2}) \quad = \left[1.8\sqrt{2} \searrow\right]$$

$$\vec{a}_{rel} = \left[a_{rel} \swarrow\!\!\nearrow\right]$$

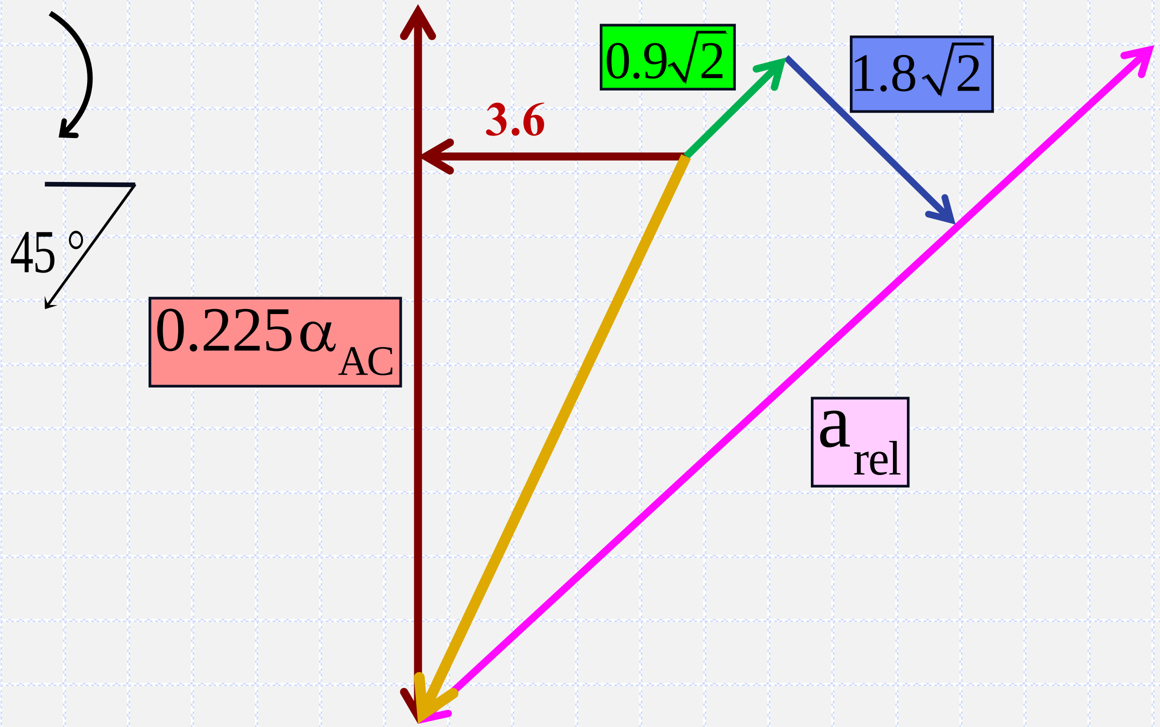
$$\vec{a}_A = [0.9\sqrt{2} \nearrow] + [1.8\sqrt{2} \searrow] + [a_{rel} \swarrow\!\!\nearrow]$$



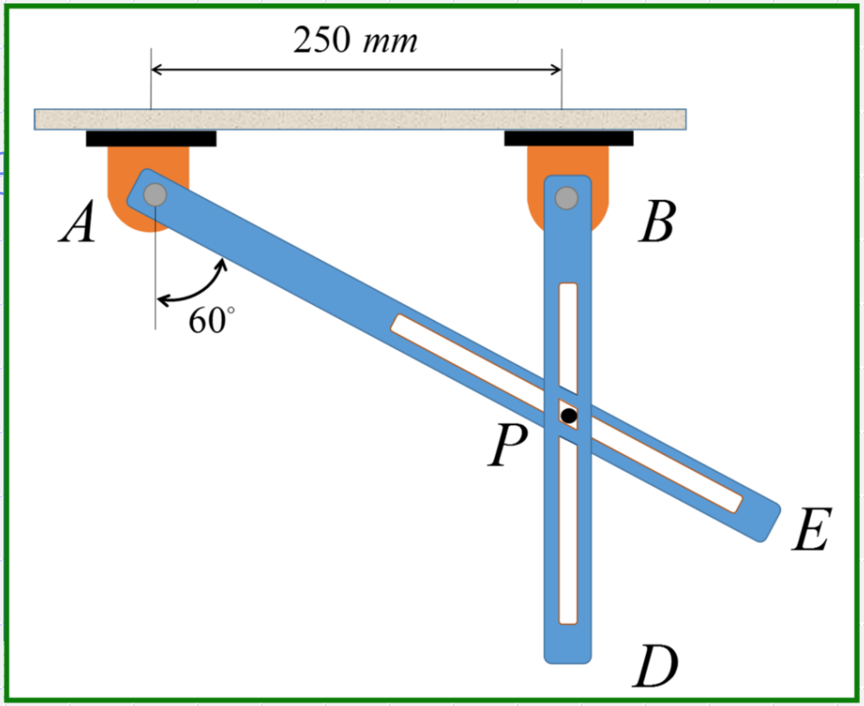
$$\vec{a}_A = [3.6 \leftarrow] + [0.225\alpha_{AC} \updownarrow]$$

$$\vec{a}_A = [0.9\sqrt{2} \nearrow] + [1.8\sqrt{2} \searrow] + [a_{rel} \swarrow\!\!\!\nearrow]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{AC} = 32 \ \mathrm{rad}/s^2 \\ a_{rel} = 8.91 \ \mathrm{m}/s^2 \end{cases}$$

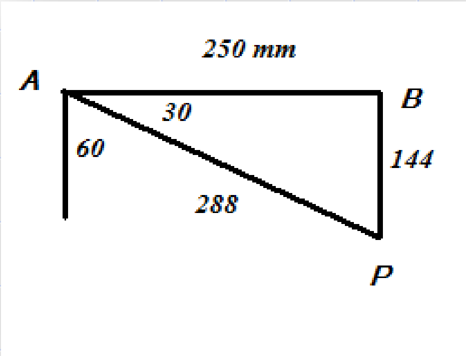


مثال : در لحظه نشان داده شده دو میله در حال دوران با سرعتهای دورانی ثابت ساعتگرد هستند. مطلوبست : سرعت و شتاب پین واقع در شیار میله ها.

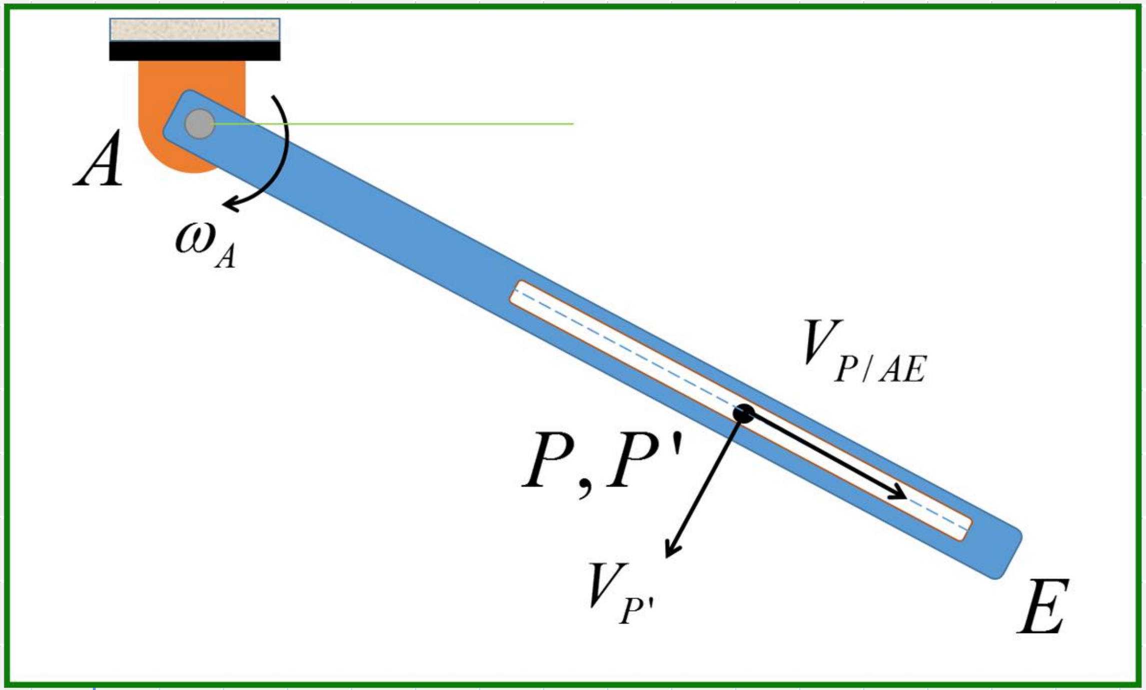


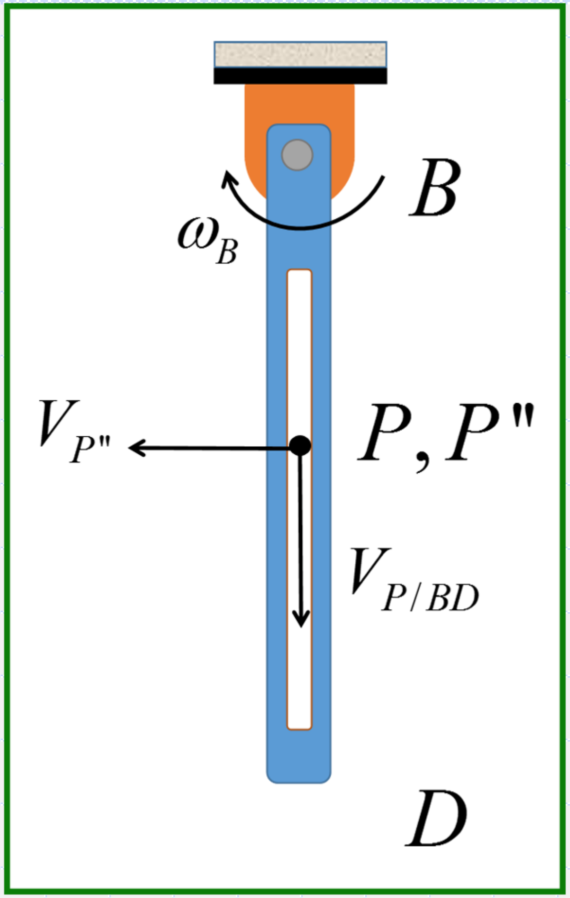
$$\omega_A = 4\,\mathrm{rad}/\mathrm{s} \quad , \quad \omega_B = 5\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

$$\vec{v}_P = ? \quad , \quad \vec{a}_P = ?$$



حل :

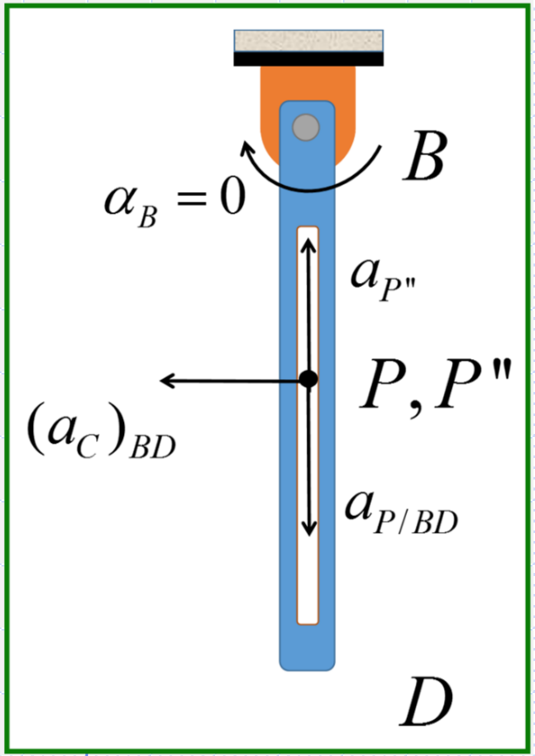




$$\vec{V}_P = (\vec{V}_{P'})_{AE} + (\vec{V}_{P/P'})_{AE} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_P = [0.288(4)\swarrow] + (\vec{V}_{P/P'})_{AE} \nwarrow\!\!\!\searrow]$$

$$\vec{V}_P = (\vec{V}_{P''})_{BD} + (\vec{V}_{P/P''})_{BD} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_P = [0.144(5)\leftarrow] + [(\vec{V}_{P/P''})_{BD} \updownarrow]$$

$$\vec{V}_P = 1.17 \ \mathrm{m/s} \ \swarrow 51.8^\circ \ , \ (V_{P/P'})_{AE} = 0.17 \ \mathrm{m/s} \nwarrow \ , \ (V_{P/P''})_{BD} = 0.92 \ \mathrm{m/s} \downarrow$$



$$\vec{a}_P = (\vec{a}_{P''})_{BD} + (\vec{a}_{P/P''})_{BD}$$

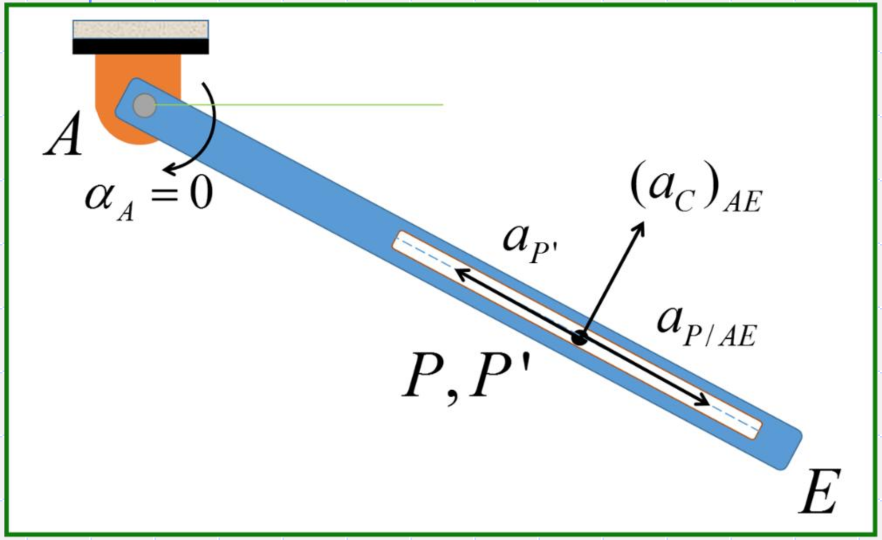
$$(\vec{a}_{P''})_{BD} = \left[0.144(5)^2 \uparrow \right]$$

$$(\vec{a}_{P/P'})_{BD} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} = [2(5)(0.92) \leftarrow] + (\vec{a}_{rel} \updownarrow)_{BD}$$

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_{P'})_{AE} + (\vec{a}_{P/P'})_{AE}$$

$$(a_{P'})_{AE} = \left[0.288(4)^2 \nwarrow \right]$$

$$(\vec{a}_{P/P'})_{AE} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} = [2(4)(0.17) \nearrow] + (\vec{a}_{rel} \nwarrow\!\!\searrow)_{AE}$$



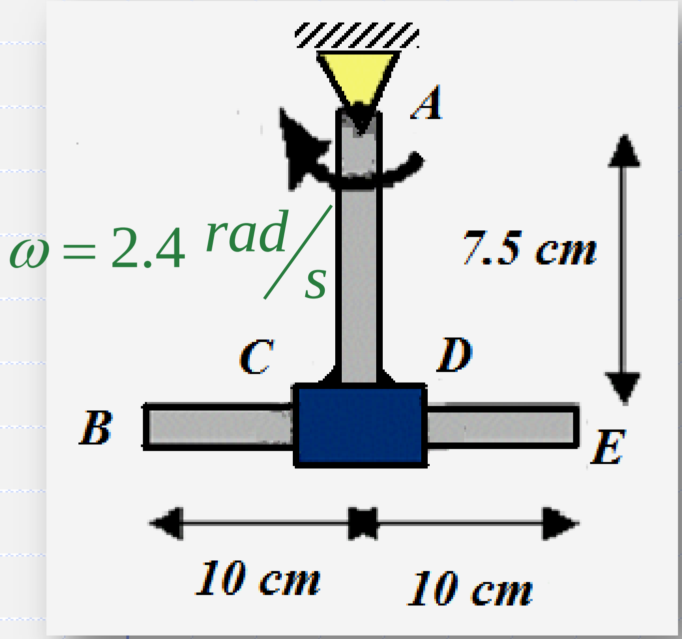
$$\vec{a}_P = [3.6 \uparrow] + [9.2 \leftarrow] + [(a_{rel})_{BD} \updownarrow]$$

$$\vec{a}_P = [4.6 \nwarrow] + [1.33 \nearrow] + [(\vec{a}_{rel})_{AE} \nwarrow\!\!\searrow]$$

$$(\vec{a}_{rel})_{AE} = [6.7 \nwarrow] \quad {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$(\vec{a}_{rel})_{BD} = [3.6 \downarrow] \quad {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\vec{a}_P = 11.43 \quad {}^{m}\!/_{s^2} \quad \nwarrow 36.7^\circ$$



مثال : اگر $\vec{v}_{BE/CD} = [15 \rightarrow \ cm/s]$ ثابت باشد و میله تی شکل در حال دوران با سرعت زاویه ای ثابت باشد، مطلوبست: سرعت و شتاب نقطه B .

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{B/B'} = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{BE/CD}$$

$$\vec{v}_{B'} = \left[(AB')\omega \nwarrow\right] = \left[(12.5)2.4 \nwarrow\right] = \left[30 \nwarrow\right]$$

$$\vec{v}_B = [30 \nwarrow] + [15 \rightarrow]$$

$$\vec{v}_B = [24.2 \nwarrow]\ cm/s \quad 82.9^\circ$$

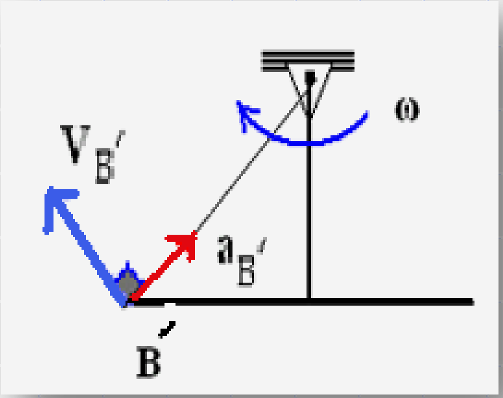
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{a}_{B/B'}$$

$$\vec{a}_{B'} = \left[(AB')\,\omega^2 \nearrow\right] = \left[(12.5)(2.4)^2 \nearrow\right] = \left[72 \nearrow\right]$$

$$\vec{a}_{B/B'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} \quad , \quad \vec{a}_{rel} = 0$$

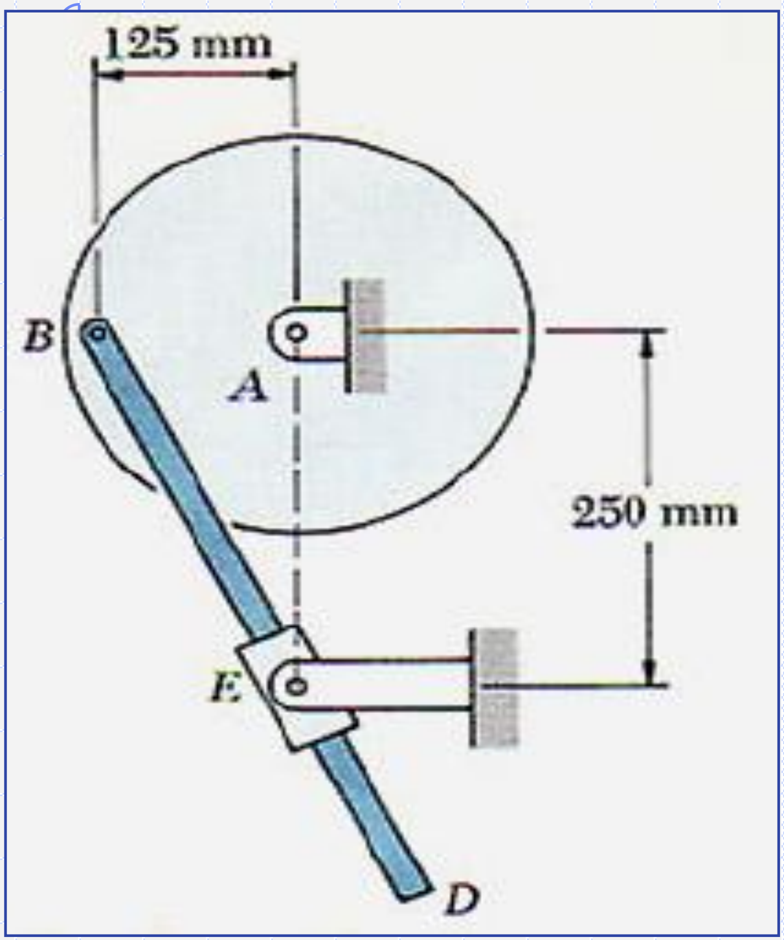
$$\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \left[2(2.4)(15) \downarrow\right] = \left[72 \downarrow\right]$$

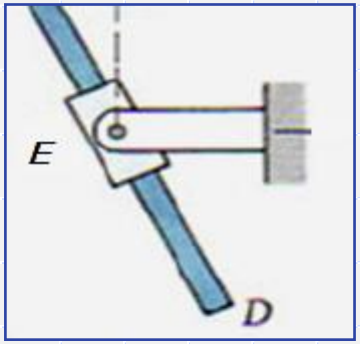
$$\vec{a}_B = [72 \nearrow] + [72 \downarrow] = \left[64.4 \searrow\right] \ cm/s^2 \quad 26.6^\circ$$

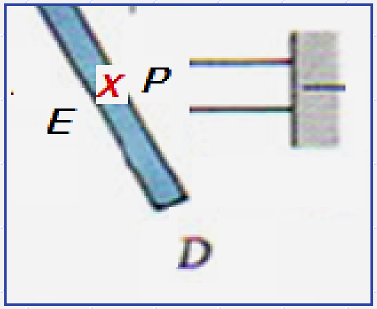


مثال: در شکل مقابل دیسک در حال دوران با سرعت زاویه ای ثابت ساعتگرد $\omega = 12\ {rad}/{s}$ است. میله BD به دیسک مفصل گشته و همزمان از داخل غلاف E عبور کرده است. مطلوبست : سرعت و شتاب نقطه روی میله در داخل غلاف E .

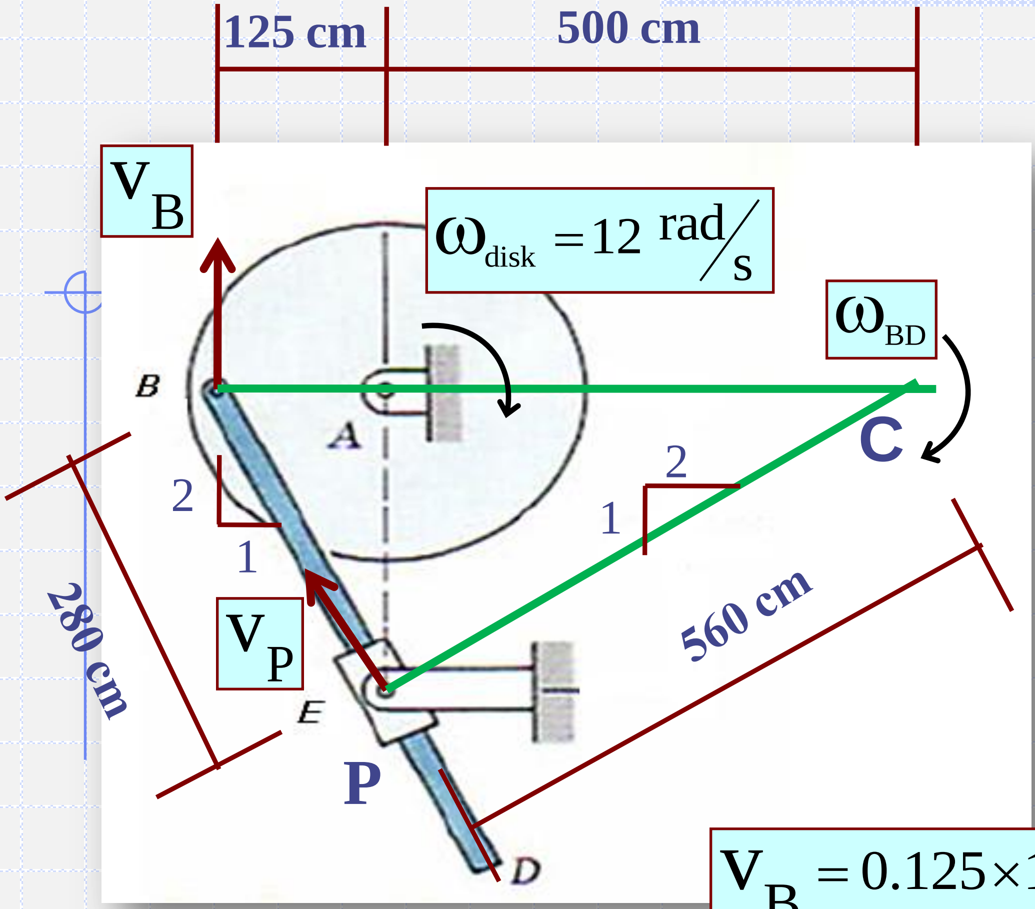
$$\omega_{BD},\ \alpha_{BD},\ \vec{v}_P,\ \vec{a}_P = ?$$







حل :



$$V_B = 0.125 \times 12 = 1.5 \uparrow m/s$$

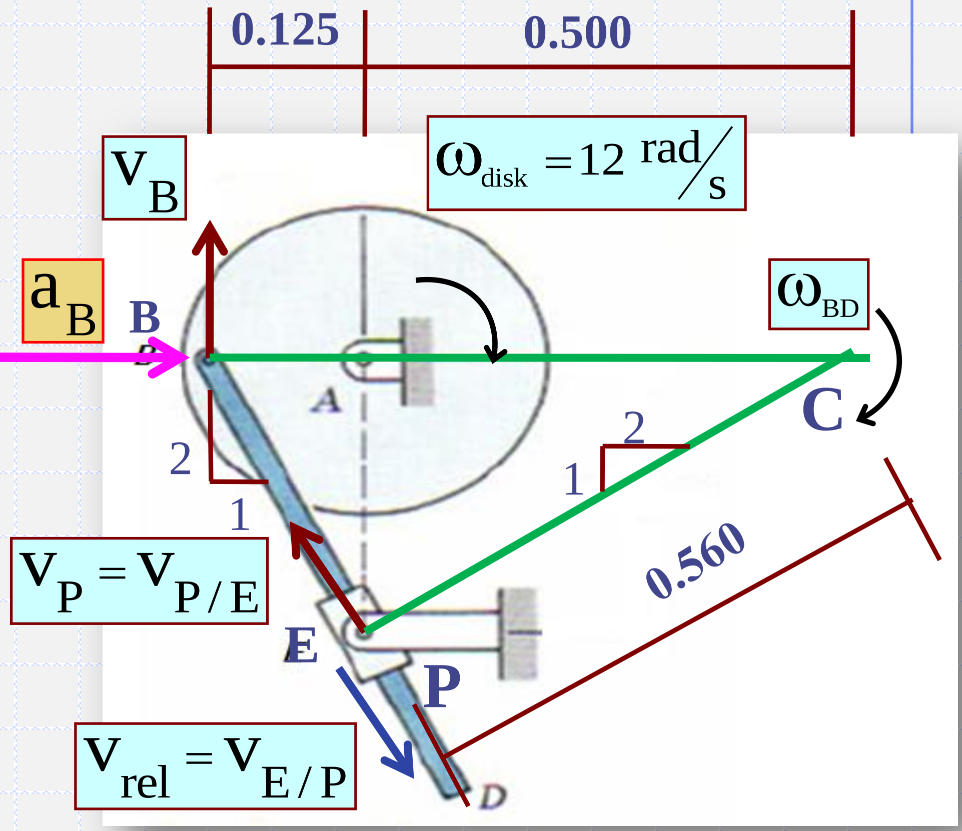
$$V_B = \omega_{BD}(r_{B/C}) = \omega_{BD}(0.125 + 0.5)$$

$$\omega_{BD} = 2.4 \quad rad/s$$

$$V_P = \omega_{BD}\left(r_{P/C}\right) = 2.4(0.56) = 1.34 \ \nwarrow \ m/s$$

$$(\overrightarrow{a_B})_n = 0.125\times 12^2 = 18$$

$$(\overrightarrow{a_B})_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}_B = 18 \rightarrow$$



$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{a}_{B/P}$$

$$\vec{a}_E = \vec{a}_P + \vec{a}_{E/P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_P = -\vec{a}_{E/P}$$

$$\vec{a}_{E/P} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cr}$$

$$= \vec{a}_{rel} + [2\omega_{BD} \times \vec{v}_{rel}]$$

$$= [a_{rel} \nwarrow\!\searrow] + [2(1.34)(2.4) \swarrow]$$

$$\vec{a}_{B/P} = (\vec{a}_{B/P})_t + (\vec{a}_{B/P})_n$$

$$= [0.28\alpha_{BD} \swarrow\!\nearrow] + [0.28(2.4)^2 \searrow]$$

[6.43 ↗]   [1.61 ↘]

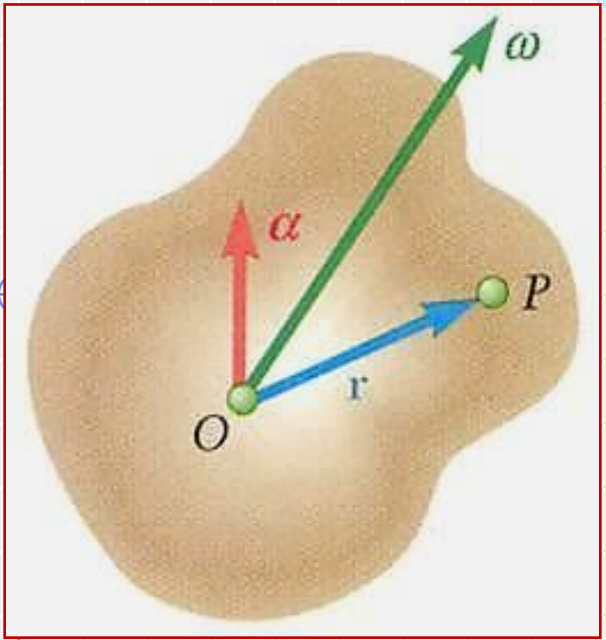
$$\vec{a}_B = [18\rightarrow] = -[a_{rel} \nwarrow\!\searrow] - [2(1.34)(2.4) \swarrow] + [0.28\alpha_{BD} \swarrow\!\nearrow] + [0.28(2.4)^2 \searrow]$$

$$\alpha_{BD} = 34.53 \ \text{rad}/s^2$$

$$\vec{a}_P = 9.10 \ \text{m}/s^2 \quad 18.47^\circ$$

حرکت دورانی حول یک نقطه

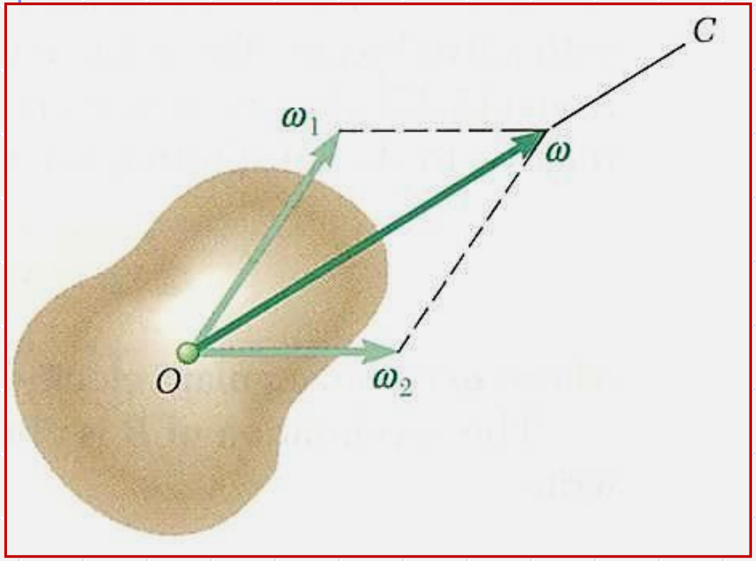
Motion About a Fixed Point



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

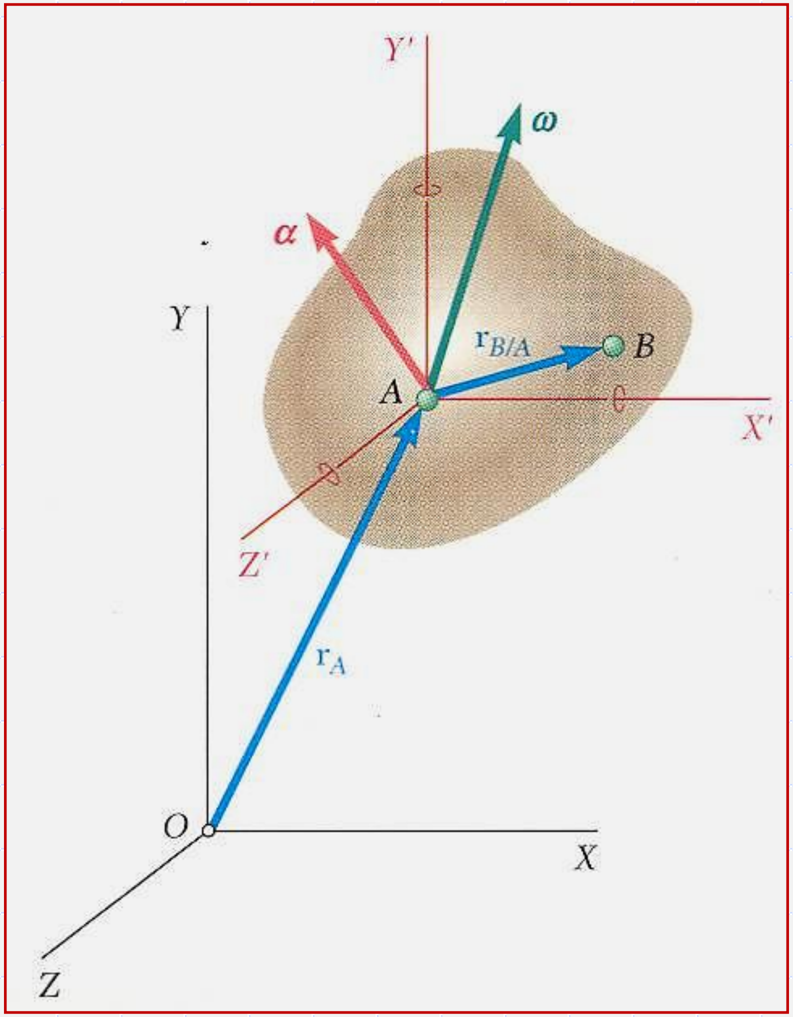


$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

General Motion حرکت کلی

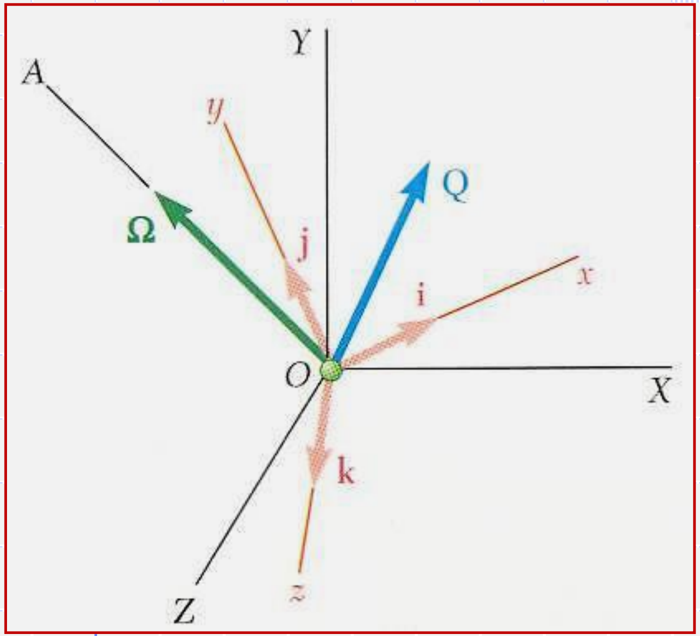


$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}\right)$$

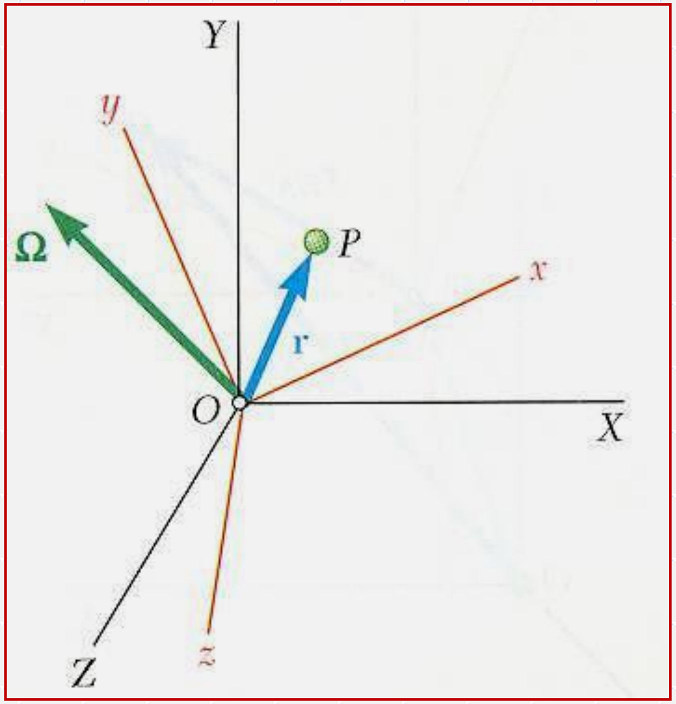


دستگاه مختصات ثابت و دستگاه مختصات متحرک :

$$\left(\dot{\vec{Q}}\right)_{OXYZ} = \left(\dot{\vec{Q}}\right)_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{Q}$$

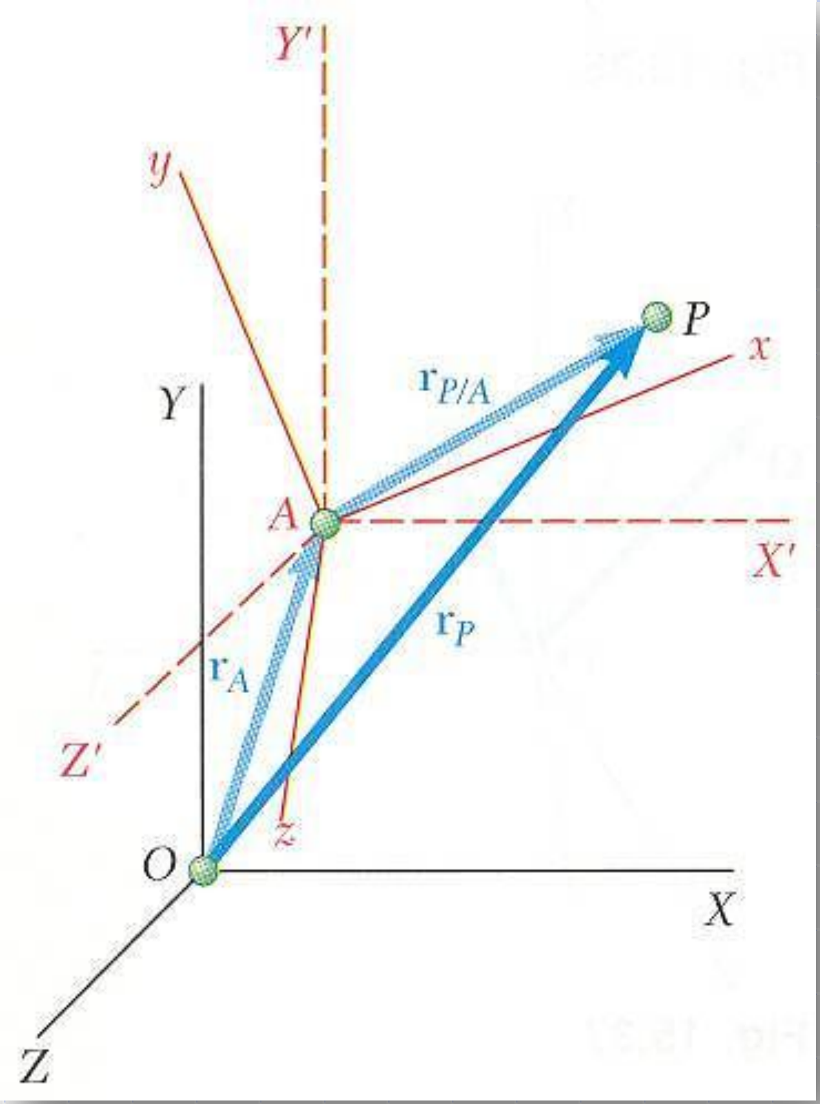
سرعت مطلق نقطه **P** :

$$\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \left(\dot{\vec{r}}\right)_{Oxyz} = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/\mathfrak{F}}$$



شتاب مطلق نقطه **P** :

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) + 2\vec{\Omega} \times \left(\dot{\vec{r}}\right)_{Oxyz} + \left(\ddot{\vec{r}}\right)_{Oxyz}$$
$$= \vec{a}_{p'} + \vec{a}_{P/\mathfrak{F}} + \vec{a}_c$$
$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \left(\dot{\vec{r}}\right)_{Oxyz} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/\mathfrak{F}} = \text{Coriolis acceleration}$$



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A}$$

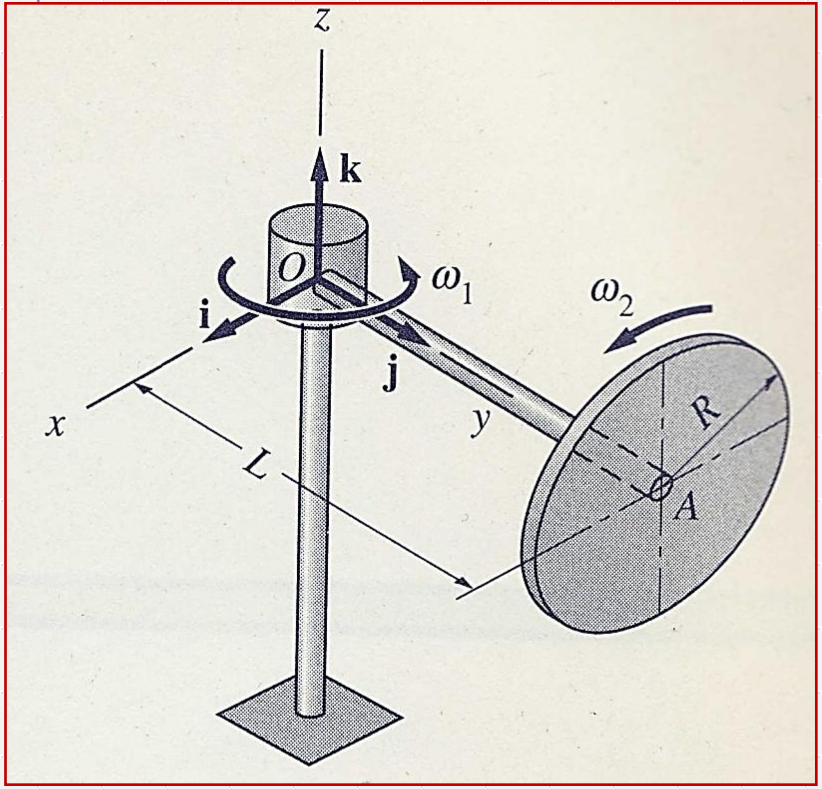
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/A} + \left(\dot{\vec{r}}_{P/A}\right)_{Axyz}$$
$$= \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/\mathfrak{F}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/A}\right)$$
$$+ 2\vec{\Omega} \times \left(\dot{\vec{r}}_{P/A}\right)_{Axyz} + \left(\ddot{\vec{r}}_{P/A}\right)_{Axyz}$$
$$= \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/\mathfrak{F}} + \vec{a}_c$$

مثال: دیسک با سرعت زاویه ای ω_2 و شتاب زاویه ای $\dot{\omega}_2$
درحال دوران حول نقطه A و میله OA با سرعت زاویه ای ω_1
و شتاب زاویه ای $\dot{\omega}_1$ درحال دوران حول محور Z می باشد .
مطلوب است : سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای مطلق دیسک



حل :

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2=\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j}$$

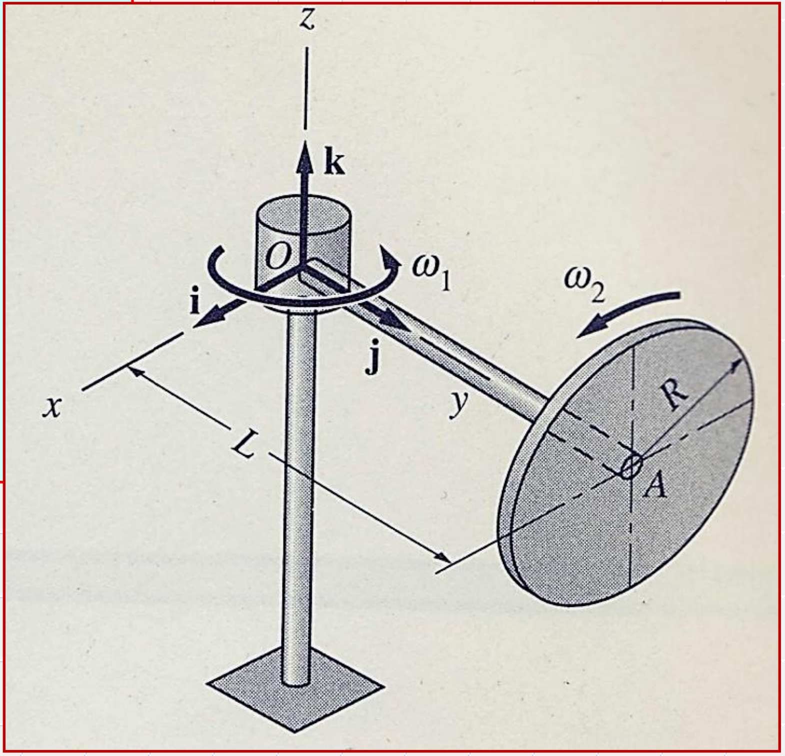
$$\vec{\alpha}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}) \Rightarrow \vec{\alpha}=\frac{d}{dt}(\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}=\dot{\vec{\omega}}_1$$

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}=\dot{\vec{\omega}}_2+\vec{\Omega}\times\vec{\omega}_2 \quad , \quad \vec{\Omega}=\vec{\omega}_1$$

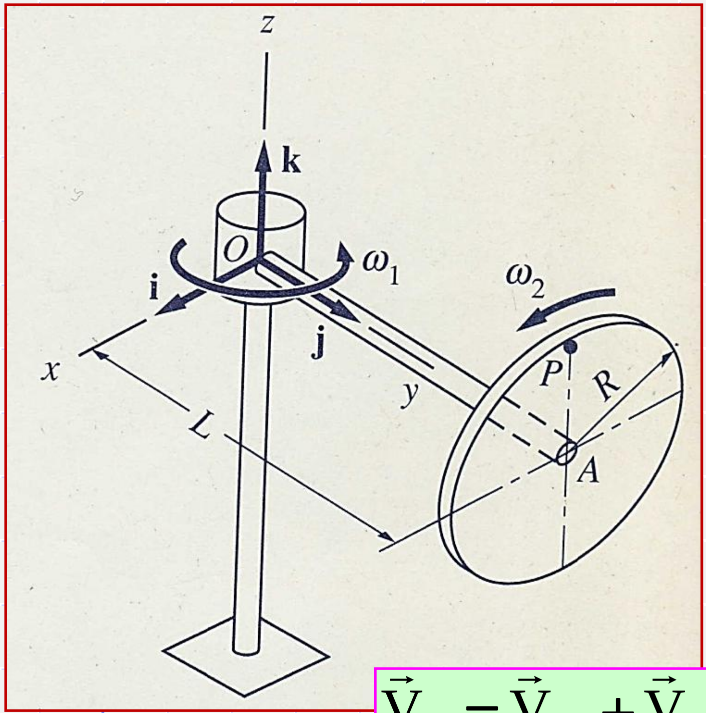
$$\vec{\alpha}=\dot{\omega}_1\vec{k}+\dot{\omega}_2\vec{j}+\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}=\dot{\omega}_1\vec{k}+\dot{\omega}_2\vec{j}-\omega_1\omega_2\vec{i}$$



مثال : در مثال فوق مطلوب است :

$$\vec{V}_P = ? \; , \; \vec{a}_P = ?$$



حل :

روش اول :

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{P/A}$$

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{A/O} = \vec{\omega}_1 \vec{k} \times L\vec{j} = -L\omega_1 \vec{i}$$

$$\vec{V}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} = (\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{j}) \times (R\vec{k}) = R\omega_2 \vec{i}$$

$$\vec{V}_P = -L\omega_1 \vec{i} + R\omega_2 \vec{i} = \left(-L\omega_1 + R\omega_2\right)\vec{i}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A}$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{r}_{A/O} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{A/O}) = \dot{\omega}_1 \vec{k} \times (L\vec{j}) + \omega_1 \vec{k} \times (\vec{\omega} \times L\vec{j}) = -\dot{\omega}_1 L\vec{i} - \omega_1{}^2 L\vec{j}$$

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A})$$

$$\vec{a}_{P/A} = (\dot{\omega}_1 \vec{k} + \dot{\omega}_2 \vec{j} - \omega_1 \omega_2 \vec{i}) \times R\vec{k} + (\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{j}) \times (R\omega_2 \vec{i})$$

$$= R\dot{\omega}_2 \vec{i} + 2R\omega_1\omega_2 \vec{j} - R\omega_2{}^2 k$$

$$\vec{a}_P = -\dot{\omega}_1 L\vec{i} - \omega_1{}^2 L\,\vec{j} + R\omega_2 \vec{i} + 2R\omega_1\omega_2 \vec{j} - R\omega_2{}^2 \vec{k}$$

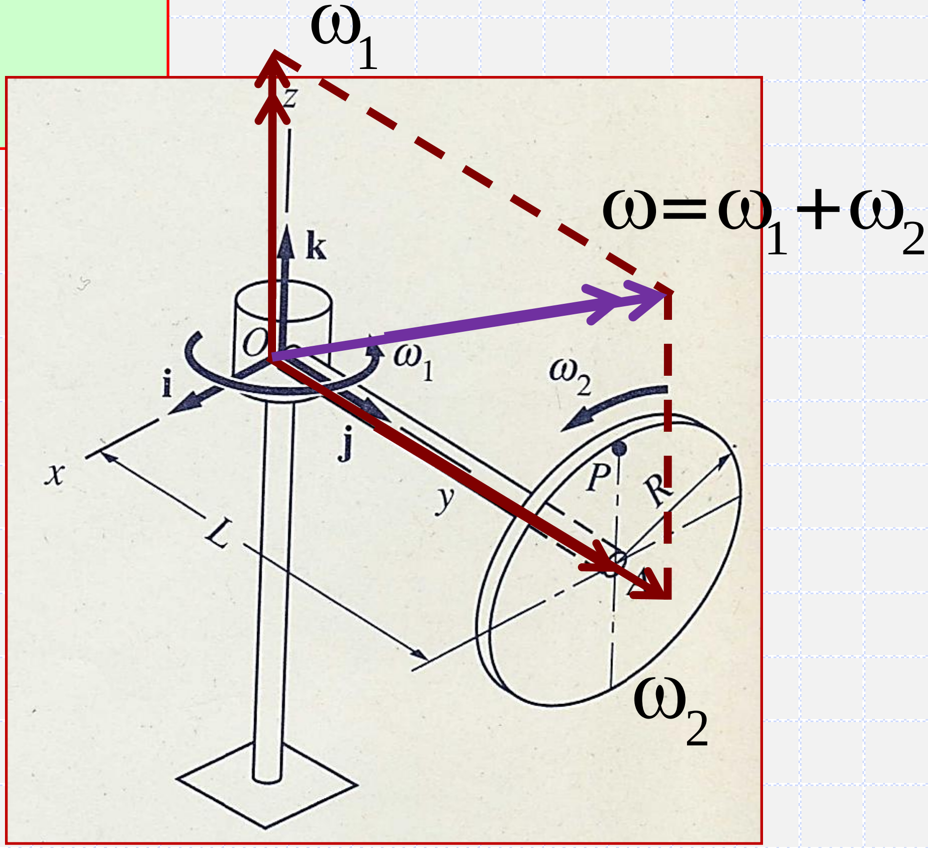
$$= \left(-L\dot{\omega}_1 + R\dot{\omega}_2\right)\vec{i} + \left(-L\omega_1{}^2 + 2R\omega_1\omega_2\right)\vec{j} - R\omega_2{}^2 \vec{k}$$

روش دوم :

چون دورانها از یک نقطه می گذرند ، در نتیجـه از همـان ابتـدا و بـدون واسطه سرعت و شتاب را نسبت به مبدا بدست می آوردیم.

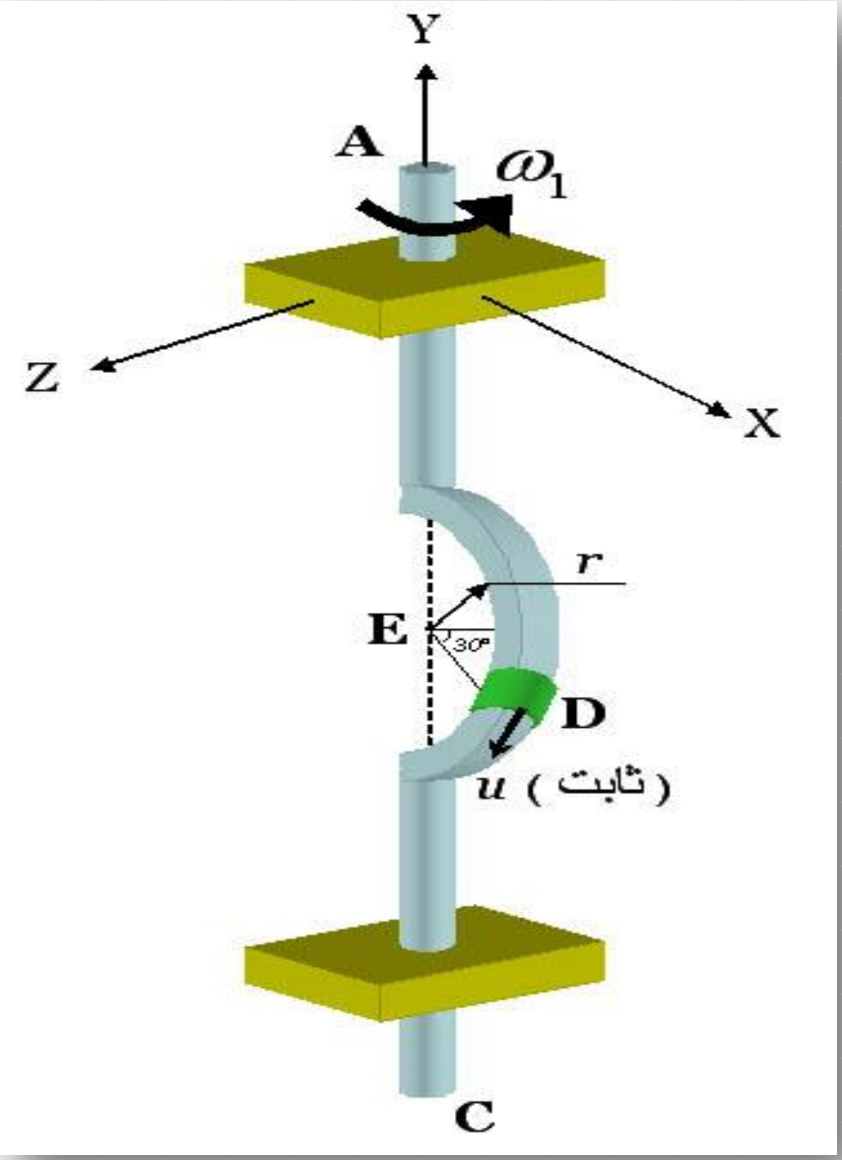
$$\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{r}_{P/O}=\left(\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j}\right)\times\left(L\vec{j}+R\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}_P=\vec{\alpha}\times\vec{r}_{P/O}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{P/O}\right)$$



مثال: میله AC در صفحه XY قراردارد و با سرعت زاویه ای ثابت ω_1 در حال دوران است. طوقه D با سرعت ثابت u ، روی میله در حال پایین آمدن است. در لحظه ای که طوقه روی قسمت دایره ای شکل میله (به شعاع r)، با افق زاویه 30° زاویه می سازد ؛ مطلوب است:

$$\vec{v}_D , \vec{a}_D = ?$$



حل :

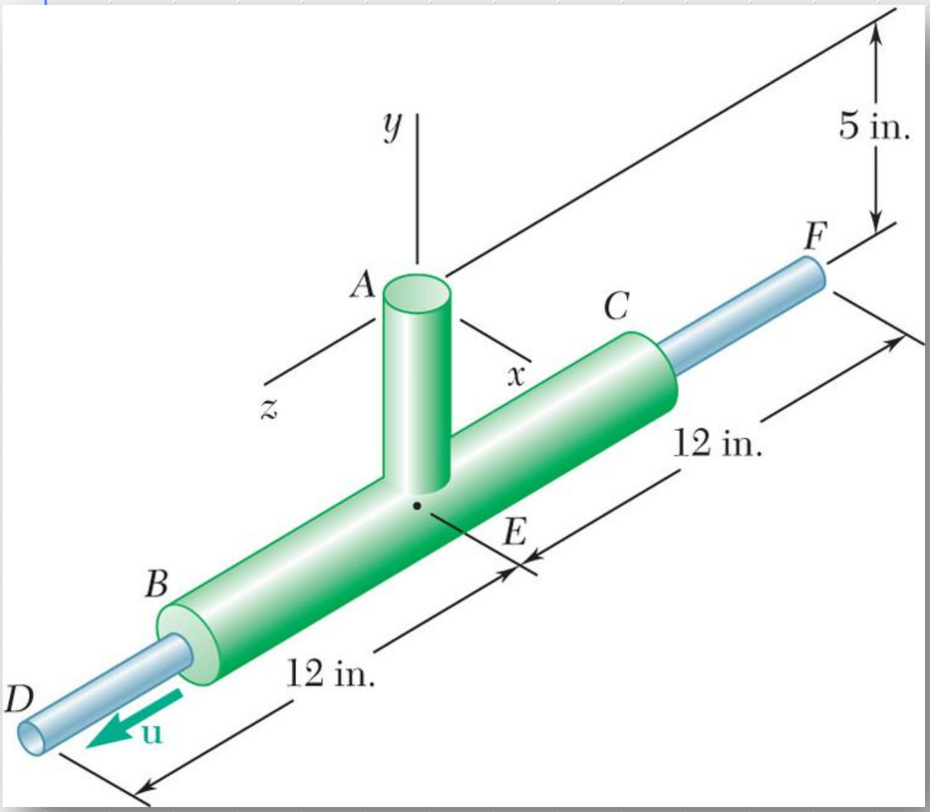
$$
\begin{cases}
\vec{V}_D = \vec{V}_{D'} + \vec{V}_{D/D'} \\
\vec{V}_{D'} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{D/E} = (\omega_1 \vec{j}) \times \left(r \cos 30° \, \vec{i} - r \sin 30° \, \vec{j} \right) = -r\omega_1 \cos 30° \, \vec{k} \\
\vec{V}_{D/D'} = \vec{u} = u\left(-\sin 30° \, \vec{i} - \cos 30° \, \vec{j} \right)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \vec{V}_D = -u \sin 30° \, \vec{i} - u \cos 30° \, \vec{j} - r\omega_1 \cos 30° \, \vec{k}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{a}_D = \vec{a}_{D'} + \vec{a}_{D/D'} \\
\vec{a}_{D'} = \vec{\omega}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{D/E} \right) = (\vec{\omega}_1 \vec{j}) \times \left(-r\omega_1 \cos 30° \, \vec{k} \right) = -r\omega_1^2 \cos 30° \, \vec{i} \\
\vec{a}_{D/D'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} \\
\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_{rel} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{u} = 2(\omega_1 \vec{j}) \times u\left(-\sin 30° \, \vec{i} - \cos 30° \, \vec{j} \right) = 2\omega_1 u \sin 30° \, \vec{k} \\
\left(\vec{a}_{rel} \right)_t = \dfrac{du}{dt} = 0 \quad , \quad \left(\vec{a}_{rel} \right)_n = \dfrac{u^2}{r} \;\Rightarrow\; \vec{a}_{rel} = \left(\vec{a}_{rel} \right)_n = \dfrac{u^2}{r}\left(-\cos 30° \, \vec{i} + \sin 30° \, \vec{j} \right)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \vec{a}_D = -r\omega_1^2 \cos 30° \, \vec{i} + 2\omega_1 u \sin 30° \, \vec{k} + \frac{u^2}{r}\left(-\cos 30° \, \vec{i} + \sin 30° \, \vec{j} \right)
$$

مثال: غلاف BC به بازوی A جوش داده شده که درحال دوران با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 3\ rad/s$ در حال دوران حول محور y است. در موقعیت نشان داده شده میله DF در داخل غلاف با سرعت ثابت $u = 16\ in/s$ به سمت چپ در حال حرکت است.



مطلوب است:

شتاب نقطه D

حل :

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{D'} + \vec{a}_{D/D'}$$

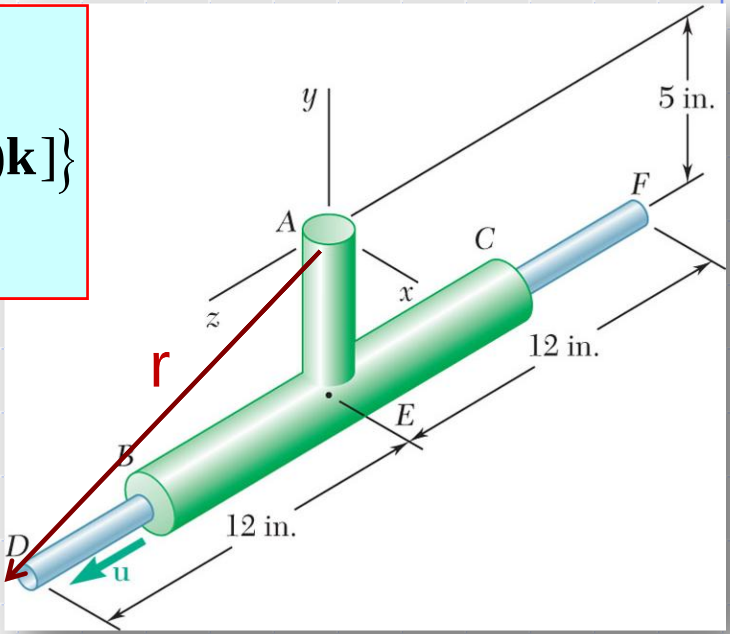
$$\vec{a}_{D/D'} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cr}$$

$$\vec{a}_{D/D'} = \vec{a}_{D/BC} + \vec{a}_{cr}$$

$$\vec{a}_D = \cancel{\dot{\vec{\Omega}}}^{\,0}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + 2\vec{\Omega}\times\left(\dot{\vec{r}}\right)_{Oxy} + \cancel{\left(\ddot{\vec{r}}\right)_{Oxy}}^{\,0}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{D'} &= \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\\ &= (3\ \text{rad/s})\mathbf{j}\times\{(3\ \text{rad/s})\mathbf{j}\times[-(5\ \text{in.})\mathbf{j}+(12\ \text{in.})\mathbf{k}]\}\\ &= -(108\ \text{in./s}^2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{Cr} &= 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = (3\ \text{rad/s})\mathbf{j}\times(16\ \text{in./s})\mathbf{k}\\ &= (96\ \text{in./s}^2)\mathbf{i}\end{aligned}$$



D′

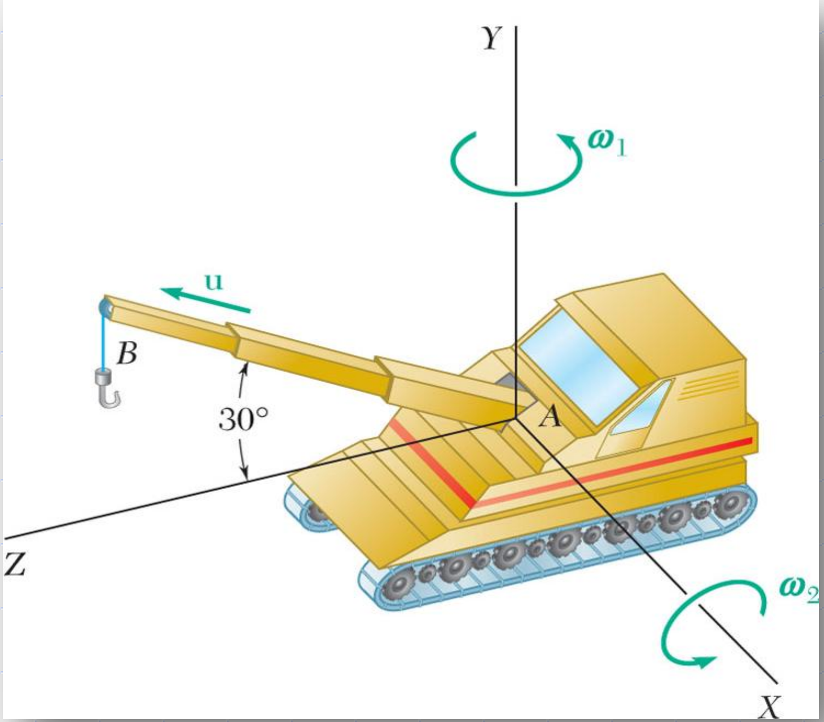
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{Cr} = -(108\ \text{in./s}^2)\mathbf{k} + 0 + (96\ \text{in./s}^2)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_D = (96\ \text{in./s}^2)\mathbf{i} - (108\ \text{in./s}^2)\mathbf{k}$$

مثال: کابین جرثقیل در حال دوران با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_1 = (0.25\ {}^{rad}\!/_{s})\vec{j}$ است.

در همان لحظه بازوی تلسکوپی جرثقیل در حال دوران با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_2 = (0.4\ {}^{rad}\!/_{s})\vec{i}$ است. اگر در موقعیت نشان داده شده بازوی تلسکوپی دارای طول 20 فوت باشد و طول آن در حال افزایش با نسبت ثابت $u = 1.5\ {}^{ft}\!/_{s}$ به سمت بیرون باشد،

مطلوب است: شتاب نقطه B



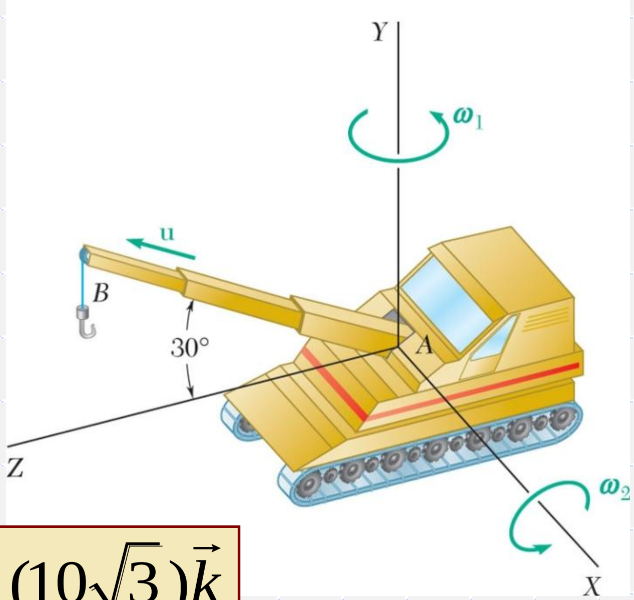
حل :

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_c}$$

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right) + 2\vec{\Omega} \times \left(\dot{\vec{r}} \right)_{Oxy} + \cancelto{0}{\left(\ddot{\vec{r}} \right)_{Oxy}}$$

$$\mathbf{\Omega} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{j} = (0.40\vec{i}) + (0.25\vec{j}) \ {rad}/{s}$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \omega_1 \vec{j} \times \omega_2 \vec{i} = -\omega_1 \omega_2 \vec{k} = -(0.10\vec{k}) \ {rad}/{s}$$



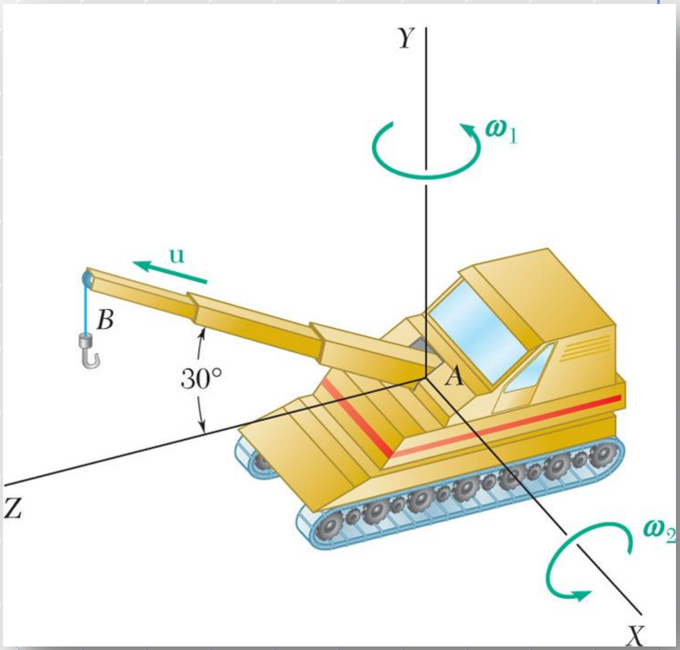
$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B = (20 \text{ ft})(\sin 30° \vec{j} + \cos 30° \vec{k}) = (10)\vec{j} + (10\sqrt{3})\vec{k}$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -0.10 \\ 0 & 10 & 10\sqrt{3} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \ {ft}/{s^2}$$

$$\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B] = (0.40\vec{i} + 0.25\vec{j}) \times \left[(0.40\vec{i} + 0.25\vec{j}) \times (10\vec{j} + 10\sqrt{3}\vec{k}) \right]$$

$$= \vec{i} - (1.6)\vec{j} - (3.85)\vec{k} \ {ft}/{s^2}$$

$$\mathbf{v}_{rel} = u(\sin 30°\vec{j} + \cos 30°\vec{k})$$
$$= (1.5)\sin 30°\,\vec{j} + (1.5)\cos 30°\,\vec{k}$$



$$\mathbf{a}_{\mathrm{cr}} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (2)(0.40\vec{\mathrm{i}} + 0.25\vec{\mathrm{j}}) \times (1.5\sin 30°\vec{\mathrm{j}} + 1.5\cos 30°\vec{\mathrm{k}})$$
$$= (0.65)\vec{\mathrm{i}} - (1.04)\vec{\mathrm{j}} + (0.6)\vec{\mathrm{k}} \quad \mathrm{ft}/\mathrm{s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (2.65)\vec{i} - (2.64)\vec{j} - (3.25)\vec{k} \quad ft/s^2$$